LEZIONI

DI

ARITMETICA

PER

ENRICO DE ANGELIS

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
1852

ALLA MEMORIA

DEL DILETTISSIMO PADRE MIO

SALVATORE

CHE MI FU GUIDA NEGLI STUDI MATEMATICI

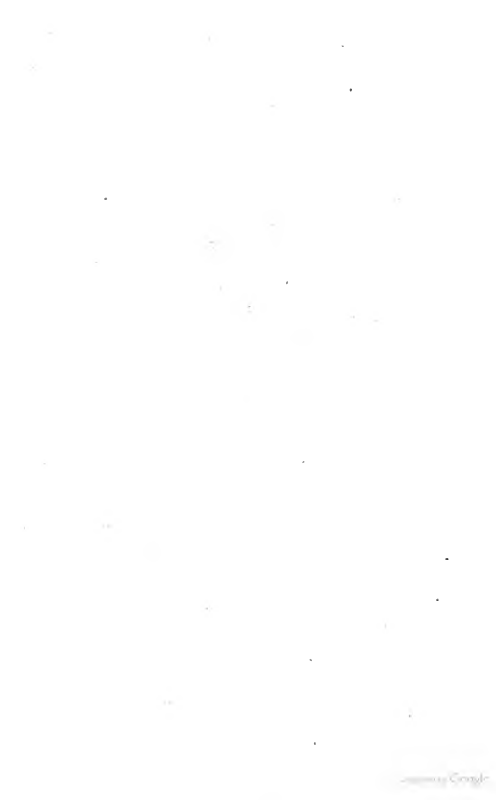
QUESTA TENUE OPERETTA

IN SEGNO DI PREMUROSA RISPONDENZA

ALLE SUE CURE AFFETTUOSE

E DI OSSERVANZA PERENNE

ALLE ALTE SUE ORME

CONSACRO

AVVERTENZA

L'impronta che ameremmo e che ci siamo a tutt'uomo sforzati che portasse la presente nostra operetta si è quella di preparare la mente di chi mette appena il piede sul limitare della scienza del calcolo, allo spirito del vero metodo matematico; di determinare primamente in un modo chiaro e distinto il posto peculiare che ha l'Aritmetica nella scienza universale dei numeri, e di venir poi trattando a mano a mano degli oggetti che sono compresi nel campo suo con arte ed industria tale, che le minute particolarità si facciano discendere dalle idee generali in modo, che mai non si smarrisca la mente di chi studia dal veder chiaro dinanzi a sè quel lume supremo il quale scopre in ogni cosa l'obbietto unico e generale della scienza. Ella presenterà perciò non poche differenze dalla maniera consueta onde si veggono scritti gli altri libri dello stesso argomento, sì nell'ordine della esposizione delle materie, e sì nello stabilire i principii generali sotto i quali si sono queste raccolte. Se il pubblico sarà benigno di approvare ed accogliere le nostre mire, noi ci reputeremo compensati appieno della cura e dello studio che vi abbiamo durato e ne trarremo sprone a nuove e più momentose fatiche.

INDICE DELLE MATERIE.

pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
2	9	*scend.* E d' uopo	È d'uopo
5	2	*salen.* nna	una
5	2	*salen.* è strana	e strana
10	1	*scend.* poere	porre
12	10	*salen.* È siccome	E siccome
21	14	*salen.* degli assiomi	dagli assiomi
35	3	*scend.* definizione II	definizione I
36	15	*scend.* 384	584
37	4	*salen.* 87499734	87499754
39	10	*scend.* di 3	di 5
41	3	*scend.* *Si legga*: da 6 tolto 6 resta 0; da 12 tolto 8 resta 4; da 14 tolto 9 resta 5; da 12 tolto 5 resta 7 *ec.*	
41	10	*scend.* 181858	161658
41	17	*salen.* *Si legga*: la cifra delle centinaia, migliaia, ec., si dovrà dire: da 9 tolto 3 resta 6; da 9 tolto 8 resta 1 *ec.*	
48	16	*salen.* si riterrà 4	si riterrà 1
59	4	*scend.* 3787	3785
62	7	*salen.* 1347	$1347\frac{3}{4}$
64	4	*salen.* *Si legga*: che posto innanzi 3 dà 43 in cui 8 entra 5 volte col resto 3 che posto innanzi all' ultima cifra *ec.*	
71	9	*salen.* 27336	227336
77	19	*scend.* che se in	che in
81	3	*salen.* vorremo	vorremmo
94	18	*scend.* 55 | 5	55 | 5
97	16	*salen.* divisori	dividendi
109	1	*salen.* 31, +	5 + 1,
116	2	*salen.* E da sapere	E da aapere
117	1	*scend.* Nel capitolo precedente	Nel capitolo II
121	6 e 8	*scend.* $\frac{6}{7}$	$\frac{6}{21}$
128	8	*salen.* $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
152	1	*scend.* di 3	di 5
169	11	*salen.* 1 | 2 | 3 *ec*	1^a | 2^a | 3^a *ec.*

169	3	*salen.* 43056721	43046721
169	8	*salen.* 1021	1024
170	5	*salen.* Estrazioni	Estrazione
176	16	*salen.* a sinistra	a destra
193	5	*scend* mille	milli
204	2	*salen.* 3 min.	2 min.
206	9	*salen.* 160 sold.	160 dan.
216	1	*scend.* componendo	permutando
216	4	*scend.* La seconda	La terza
218	7	*scend.* 5	3
224	13	*salen.* 15	13

LEZIONI

DI ARITMETICA

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI

Obbietto dell' aritmetica. — Formazione de' numeri.

1. Dicesi *grandezza* o *quantità* quell' attributo che un obbietto ha di poter essere da noi concepito come capace di aumento o di diminuzione. Questo attributo scorgesi, per modo di esempio, nelle linee, nelle superficie, nei corpi, negli angoli, nelle forze, nella velocità, nel tempo, e simili.

La quantità può essere concepita sotto due forme differenti : o come un tutto senza distinzioni di parti, per il vincolo di continuità che le unisce, e allora chiamasi quantità *concreta* o *continua;* o come la collezione di più parti distinte, ed in tal caso prende il nome di quantità *discreta* o *numero* [1]. Esempio della prima maniera di concepire la quantità è il considerare l' altezza di un edifizio, la estensione di un campo, la capacità di un vase, e simili; esempio della seconda è il considerare una riunione di uomini, di carlini, di canne, ec.

2. Si dicono generalmente *Matematiche* [2] quelle scienze che hanno per obbietto la quantità. Esse prendono differenti nomi,

[1] In quanto all'idea del numero si legga la nota A posta in fine dell'aritmetica.

[2] Da Μαθήματα *scienze*; sicchè gli antichi a cagione della indubitata loro certezza chiamavano, per antonomasia, le matematiche le *scienze*.

secondo la natura delle cose in cui la considerano. Secondo poi la duplice maniera in cui possono considerarla, vanno distinte sotto due generali divisioni, che sono la *Geometria* e l'*Analisi*, o con voce più moderna l'*Algoritmia* [1]. La Geometria tratta dell' estensione, ossia della quantità continua, l' Algoritmia dei numeri.

L'*Aritmetica* [2] è quella branca dell'Algoritmia che studia i numeri sotto il solo particolare aspetto della loro formazione, o sia generazione elementare [3].

3. E d'uopo quindi aver chiaro nella mente il concetto di que-

[1] La voce *algoritmia* è stata introdotta dal Wronski. E chi sarà che non l' adotti, quando ella vien proposta da chi n' ebbe veramente il dritto, da chi seppe il primo considerare la scienza de' numeri dal suo più alto e generale aspetto, trovando maravigliosamente una sola legge suprema dalla quale si deducono tutte le leggi possibili della generazione delle quantità? Veggasi la sua *Filosofia della Tecnia*.

[2] *Aritmetica* non viene, come alcuni dicono, da αριθμὸς *numero* e da τέχνη *arte*, perchè infatti l'aritmetica non è in generale la scienza de' numeri, ma una parte di questa scienza. Deriva bensì da αριθμετηκή, agginntivo che gli antichi prendevano sustantivamente, suttintendendovi τέχνη; così *aritmetica*, secondo il suo vero significato, suona arte di *numerare*, di calcolare i numeri.

[3] Noi ci maravigliamo fortemente come moltissimi autori diano per definizione dell' aritmetica l' idea vastissima e generalissima di *scienza dei numeri*.

I numeri ponno considerarsi o *particolarmente*, cioè nei loro *fatti*, o *generalmente*, cioè nelle loro *leggi universali*. Di qui nascono le due divisioni generali dell'algoritmia, che sono l' aritmetica e l' algebra. Ora due sono i punti di vista sotto i quali possono studiarsi le leggi dei numeri: quello della loro generazione, e quello del loro paragone; la generazione poi può essere *elementare* o *sistematica*, su di che si consulti la nota B. Imperò l'aritmetica che ci presenta i fatti dei numeri, ce li presenta sotto il doppio aspetto di generazione e di rapporto; la generazione poi ch' ella studia è elementare. Se alcuna volta si fa parola nell' aritmetica di alcune proprietà generali dei numeri, ciò fassi per la necessità che si ha di spiegare alcuni fatti, e stabilire certe regole per il calcolo numerico; così si vien chiedendo una luce all' algebra, rischiaratrice suprema, dalla quale naturalmente l'aritmetica dipende; ma non però quest' ultima esce mai dal campo suo, ove non sono che i fatti dei numeri. In somma si può dire che l' aritmetica è quella scienza la quale c' insegna ad effettuare sui numeri particolari i risultamenti generali forniti dall'algebra; e così ella è uno strumento secondario di questa scienza sovrana delle quantità.

Riesciremmo infiniti, ed usciremmo dal nostro soggetto, se volessimo qui dire appena della filosofia della generazione e del confronto dei numeri, e determinare

sta formazione. Per far ciò, è da osservare che ad avere una precisa idea della grandezza di una cosa quale che siasi, è mestieri paragonarla a quella di un'altra cosa dello stesso genere, scelta e stabilita innanzi come termine di paragone di tutte le altre, e che già si conosca per una percezione sensibile che siasene avuta prima; la quale si addimanda *unità*. Questo paragonare che si fa all'unità una grandezza dicesi *misurarla*.

Ora nel misurare una grandezza, la si può trovare contenere l'unità un esatto numero di volte; o, se ciò non avviene, divisa l'unità in un certo numero di parti uguali, la grandezza potrebbe contenerne un altro certo numero esattamente. L'unità nel primo caso, e nel secondo una di quelle parti uguali in cui essa è stata divisa, chiamasi *parte aliquota* della grandezza, perchè generalmente una quantità si dice parte aliquota di un' altra allorchè vi è contenuta un certo numero di volte esattamente.

Da ciò si comprende chiaramente come le grandezze possano essere espresse in numeri; ed è però appunto ch'esse diconsi ancora *quantità*.

4. Potrebbe avvenire, come sarà dimostrato in appresso, che una grandezza non contenga esattamente nè l'unità nè qualunque sua parte aliquota per piccola che si fosse; questa grandezza dicesi allora *incommensurabile* coll'unità, mentre le altre sono *commensurabili*. Intanto bene s'immagina che questa grandezza ha la sua metà, terza parte, quarta parte, ec.; dunque se prendasi per unità una di queste parti aliquote, la grandezza diviene commensurabile. Da ciò può conchiudersi che non ci ha quantità commensurabile o incommensurabile assolutamente, ma che cangiando l'unità, una quantità d'incommensurabile può divenire commensurabile, e di commensurabile incommensurabile.

così meglio la differenza delle varie branche dell'algoritmia, e il punto comune ove esse insieme concorrono. Niuno più che il Wronski ha profondamente meditate e poste in luce queste cose; e lo studio delle opere di sì straordinario ingegno è indispensabile a chi voglia giungere ad avere dei numeri, e però delle matematiche tutte, ond' ei sono l'essenza, l'idea più generale e sublime. Senza di tali studi, pur troppo dall'universale negletti, si sarà bensì un gramo formolista, ma un matematico non mai; e ben si appose chi disse: *J'ai souvent trouvé plus d'enseignements et surtout d'enseignements simples dans la véritable philosophie de la science que dans les formules algébriques.*

Quando dunque si stabilisce una unità, non tutte le grandezze sono esprimibili in numeri per mezzo di essa; ma ve ne hanno maggiori e minori di questa unità non esprimibili se non per approssimazione. Questo fatto del quale, come abbiam detto, sarà dimostrata più in là l'esistenza, non si può spiegare perchè propriamente avvenga. L'incommensurabilità di certe grandezze per rispetto a un comun termine di paragone è una legge che ha la sua ragione nella natura stessa della quantità; onde siccome non ci è dato d'indagare l'intima essenza di questa idea semplice di quantità, così non possiamo nè anche spiegare questa legge, di cui è parola.

5. Un numero si chiama *intero* quando è la collezione di più unità; *frazionario*, o semplicemente *frazione* [1] quando è la collezione di più parti uguali di unità. Ancora distinguonsi le frazioni in *vere*, e *spurie* o *false*; vere sono quelle che contengono un minor numero di parti uguali che l'unità, spurie quelle che ne contengono un numero maggiore. Una frazione vera potrebbe essere una sola di quelle parti uguali in cui l'unità si è divisa; in questo caso non è più un numero.

La serie dei numeri interi formasi dunque coll'aggiungere successivamente l'unità a sè stessa. Così aggiunta una sola volta l'unità a sè stessa, si ha il primo numero intero; aggiunta a questo primo numero intero l'unità, si ha il secondo; aggiunta l'unità al secondo si ha il terzo, e così di seguito. Due numeri interi si dicono *consecutivi* quando l'uno è il seguente dell'altro nella serie che abbiamo detta, cioè quando si dee aggiungere all'uno l'unità per avere l'altro. Da ciò è chiaro che tra due numeri interi consecutivi non esiste altro numero intero.

6. È da notare ch'essendo arbitraria la scelta dell'unità, non ci ha numero intero o frazionario assolutamente; ma cangiando

[1] Alcuni sogliono chiamare propriamente *frazione* una frazione minore dell'unità, e *numero frazionario* una frazione maggiore; ma un tal linguaggio è da rigettare come inesatto; perciocchè frazione e numero frazionario significano precisamente lo stesso; e poi perchè costoro, come leggesi nei loro scritti, si servono anche delle espressioni *frazione vera*, *frazione spuria?* Così essi prendono la parola frazione una volta in senso particolare, e un'altra volta in senso generale; il che è una strana irragionevolezza e contraddizione.

l'unità può un numero da intero divenir frazionario, e da frazionario intero. Così se nel misurare le lunghezze, assumasi per unità il palmo, una collezione di questi palmi sarà un numero intero; se poi scelgasi per unità la canna, questo stesso numero sarà frazionario come l'insiemo di varie parti uguali di essa canna.

7. La serie dei numeri è infinita, perocchè nulla impedisce al nostro spirito di concepire aggiunta ad un numero per grande ch' esso sia un' altra di quelle cose, ond' esso è la collezione. Sicchè non può esservi limite ad un numero di unità; e i matematici per esprimere ciò dicono che una quantità può essere *infinitamente grande*, cioè maggioro di qualunque quantità assegnabile. Parimente non vi è termine al numero di parti uguali in cui l'unità può dividersi, il che vuol dire che non vi è termino alla picciolezza di ciascuna di queste parti, e questa è appunto l'idea che dee risvegliarci il dire che si fa spesse volte nelle matematiche che una quantità può essere *infinitamente piccola*, cioè minore di ogni quantità assegnabile.

È chiaro da tali considerazioni che non ci ha grandezza o piccolezza assoluta.

8. Il misurare, come si è detto (3), è un paragone, ma non ogni paragone importa il misurare, perchè il misurare ci dà un' idea precisa della quantità, mentre il paragone può non darcela. Se, per esempio, si esprima il numero di volte che una lunghezza contiene un'altra minore, senza far conoscere qual sia questa minore; o si esprima il numero di volte che ciascuna di esse contiene una terza minore di entrambe, non determinando quest' ultima, allora, non sapendosi se la comune misura sia, per esempio, o il palmo, o la canna, o il miglio, ec., non si avrà una idea esatta della grandezza di ciascuna delle due lunghezze, ma solamente del quanto è l' una rispetto all' altra. Questa scambievole relazione di quantità è ciò che dicesi *rapporto* o *ragione* delle due grandezze [1].

[1] L'idea di rapporto è un' idea semplice, e però non ammette definizione reale; nè di ciò è a dolere, perchè l'intelletto ha delle idee semplici un intuito chiaro e perfetto, e il volerle dilucidare con altre idee la è una cosa inutile è strana. Ond' è che ci riescono impazzati quei tanti comentatori e *vendicatori*

9. Allorchè un numero si enuncia determinando la natura ovvero la specie dell' unità, dicesi *concreto*, quando non si determina, cioè fassene astrazione dicesi *astratto*. Ora egli è chiaro che l' idea avuta innanzi del numero, ci presenta solo allo spirito il modo della sua formazione, indipendentemente dalla specie dell' unità; noi dunque studieremo i numeri come astratti, e le proprietà che si conosceranno di questi, converranno anche particolarmente a ciascun numero concreto.

Sistema di numerazione.

10. La prima cosa che ci si presenta nello studio dei numeri si è il conoscere quali siano le convenzioni stabilite per esprimerli colla parola e rappresentarli colla scrittura. L' insieme di queste convenzioni costituisce il *sistema di numerazione*. Divedesi dunque esso in due parti, ciò sono la *numerazione parlata* e la *numerazione scritta*.

Non è dubbio alcuno che la numerazione parlata abbia preceduta la numerazione scritta, come non è dubbio alcuno che il parlare sia stato prima dello scrivere. Imperò noi, per seguitare l'ordine naturale, incominceremo dal trattare della prima, e ne verremo poscia deducendo la seconda.

11. NUMERAZIONE PARLATA. Allorchè gli uomini ebbero da prima la necessità di esprimere col discorso i numeri furono naturalmente condotti a non assegnare a ciascuno di essi una parola particolare, ma ne ripeterono sempre alcune poche combinate fra loro con determinate convenzioni. A volere ben comprendere ciò, immaginiamo che alcuni pastori avessero avuto a numerare una torma di pecore. Essi ebbero ricorso, per aiutare la loro memoria, alle dita delle loro mani, come anche vedesi fare tuttodì, e uno di loro, chiusi prima i pugni, incominciò poi a stendere

di Euclide, insieme con mille altre siffatti, i quali ne assordano colle inopportune loro gargagliate su tal soggetto. Noi, seguendo sempre la stretta osservanza prefissaci dei precetti logici, non abbiam fatto se non risvegliare nella mente del lettore questo concetto della ragione che ognuno ha, e ne abbiamo indi data una definizione nominale, o vogliasi, assegnazione di nome, il che si può sempre fare, eziandio delle idee semplici.

successivamente le dita, rappresentando con ciascbeduno di esse una pecora; allo stendere del primo dito, disse una parola che corrisponde alla italiana *uno*, allo stendere del secondo un' altra parola corrispondente a *due*, e poi successivamente a *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*. Qui, esaurite le dita, chiuse nuovamente i pugni, e ricominciò a fare varie altre volte il medesimo di prima, ed un altro pastore per ricordargli quante volte il faceva, chiuse medesimamente i suoi pugni e venne stendendo un dito per ogni volta che quello percorrea tutte le sue.

In questo modo il secondo pastore, esaurite ch'ebbe le sue dita, si trovò di aver contato dieci volte dieci, ovvero dieci *decine*, chiamando così la collezione di dieci unità, e considerandola come una nuova unità. Un terzo pastore per ricordare similmente al secondo quante volte ei percorreva tutte le sue dita, chiusi i suoi pugni, stese successivamente un dito per ogni volta che il secondo contava dieci decine, e così questo terzo, quand' ebbe percorso tutte le sue dita, si trovò di aver contato dieci volte dieci decine, ovvero dieci *centinaia*, chiamando così la collezione di dieci decine ed assumendola per una nuova unità. Continuando in questo modo, vedesi ben chiaro come essi si elevarono sempre naturalmente da una unità ad un' altra decupla; ed è però che il sistema di numerazione usato universalmente dicesi *decimale*.

12. Ora dal considerare vari ordini di unità venne come una conseguenza immediata che si adoperassero sempre alcune poche parole combinate fra loro con alcune convenzioni stabilite per enunciare qualunque numero. Per rendere quanto più si possa chiare e sensibili le leggi che seguono le combinazioni di queste parole, noi le abbiamo messe sotto gli occhi del lettore nel quadro che segue. E vogliamo innanzi tratto avvertire che queste leggi non sono solamente proprie delle parole italiane, ma comuni a quelle di tutte le lingue, perchè è palese dall' origine da noi esposta del sistema di numerazione decimale, che gli uomini in ogni età e in ogni luogo han tutti naturalmente contato allo stesso modo.

3ª CLASSE MILIONI	2ª CLASSE MIGLIAIA			1ª CLASSE UNITA'		
.. milione	centomila	diecimila	mille	cento	dieci	uno
.. doemilioni	duecentomila	ventimila	duemila	duecento	venti	due
.. tremilioni	trecentomila	trentamila	tremila	trecento	trenta	tre
.. quattromilioni	quattrocentomila	quarantamila	quattromila	quattrocento	quaranta	quattro
.. cinquemilioni	cinquecentomila	cinquantamila	cinquemila	cinquecento	cinquanta	cinque
.. seimilioni	seicentomila	sessantamila	seimila	seicento	sessanta	sei
.. settemilioni	settecentomila	settantamila	settemila	settecento	settanta	sette
.. ottomilioni	ottocentomila	ottantamila	ottomila	ottocento	ottanta	otto
.. novemilioni	novecentomila	novantamila	novemila	novecento	novanta	nove
2ª Classe. Milioni	1ª Classe. Unità					

13. Le parole scritte nella prima colonna a destra sono differenti le une dalle altre e rappresentano varie collezioni di unità *semplici*. È poi visibile, percorrendo il quadro per linee orizzontali, che ciascuna di queste parole è ripetuta nelle varie colonne per esprimere la stessa collezione di vari ordini di unità, come *quattrocento*, *quattromila* ec. Però solo nella seconda colonna non vedesi pienamente osservata questa legge, perchè in luogo di dirsi *duedieci*, *tredieci*, *quattrodieci* ec., si dice *venti*, *trenta*, *quaranta* ec., nelle quali parole, ad eccezione della prima *venti* [1], si veggono per altro i radicali delle prime nove, ad eccezione di *venti e trenta* [2], la comune desinenza *anta*.

[1] *Venti* è derivato dal latino *viginti*. Ora io credo che i primi latini, per uniformità con *triginta*, *quadraginta* ec. dissero *duiginta*; e che poi tolsero via il *d* e cangiarono l' *u* in *v* per addolcire il suono della parola. L' uso poi cangiò l' *a* finale in *i*.

In italiano per istabilire l' uniformità si dovrebbe dire *duanta*.

[2] *Trenta* si dice per togliere la cacofonia di *treanta*.

In quanto all' irregolarità di queste parole, che, come facciamo osservare nel n.° 15, è una conseguenza dell' irregolarità delle parole *dodici*, *tredici* ec., la nostra opinione è che questi numeri piccoli trovandosi più facilmente nella bocca della plebe, che i numeri grandi siano stati più facilmente corrotti che

14. Nella prima linea orizzontale superiore vedesi che i nomi delle unità di vario ordine non son tutti differenti l'un dall'altro, imperocchè si è convenuto, per più economia di parole, e quindi per minore sforzo di memoria, di dividere queste unità in *classi* a tre a tre, come indicano le grappe sovrapposte; così i nomi differenti sono solamente i primi a destra di ogni classe, come *uno*, *mille*, *milione*, *bilione* ec., e gli altri due formansi sempre col porre le parole *dieci* e *cento* innanzi ai nomi delle prime unità rispettive, come *diecimila*, *centomila*; *diecimilioni*, *centomilioni*, ec. Così ogni classe ha le sue unità decine e centinaia; la prima classe, come sopra le si vede scritto, dicesi *delle unità*, la seconda *delle migliaja*, la terza *dei milioni*, la quarta *dei bilioni*, e così di seguito.

Questa divisione in classi ternarie è quella che usano i Francesi, ed è regolarissima; laonde meritava di esser trattata in primo luogo. Gl' Italiani ne seguono una meno regolare, che è in classi di sei unità, come indicano le linee sottoposte al quadro. Allora ogni classe ha le sue unità, decine, centinaia migliaia, decine di migliaia, e centinaia di migliaia. La prima classe, come sotto le si vede scritto, dicesi *delle unità*, la seconda *dei milioni*, la terza *dei bilioni*, la quarta *dei trilioni*, e così appresso.

15. Si noti ora che le parole della prima colonna a destra esprimono numeri consecutivi, dei quali cioè ognuno formasi collo aggiungere all'antecedente una unità *semplice*. Lo stesso non avviene nelle altre colonne, così *dieci*, *venti*, *trenta* ec.; *cento*, *duecento* ec. non sono numeri consecutivi, perchè per passare da uno di essi al seguente si dee aggiungere una unità composta e non una semplice. Adunque incominciando dalla seconda colonna, è chiaro che tra *venti* e *trenta*, fra *trenta* e *quaranta*, ec. vi hanno altri numeri ad esprimere, i quali nascono dallo aggiungere successivamente una unità semplice a ciascuno di questi, finchè si giunga al seguente. Le parole onde si enunciano questi altri nu-

non furono quegli altri. La considerazione poi che questa irregolarità trovasi per le parole medesime in tutte le altre lingue, ci porta a credere vera quell'opinione che tutte le varie lingue esistenti siano rami di un tronco principale, di una lingua parlata un tempo universalmente da tutti gli uomini.

meri formansi col poere *uno, due, tre. . nove* dopo le anzi dette, come *ventuno, ventidue, ventitre .. ventinove.* Solo però è da osservare che in cambio di dirsi *dieciuno, diecidue, diecitre, dieciquattro, diecicinque, diecisei,* è invalso l'uso di dire *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici.* Di qui è seguita anche l'irregolarità di dire *venti, trenta, quaranta* ec., invece di *duedieci, tredieci, quattrodieci* ec., perchè queste ultime parole sarebbonsi facilmente confuse colle dette dianzi. Passando alla terza colonna i numeri consecutivi tra *cento* e *duecento,* fra *duecento* e *trecento* ec., si esprimono col porre successivamente dopo queste parole le altre da *uno* a *novantanove.* Passando alla quarta colonna, si porranno dopo le parole *mille, due mila* ec. le altre da *uno* a *centonovantanove* e così seguitando.

16. Ecco dunque esposto nel modo più chiaro e sensibile le leggi onde con alcune poche parole si può enunciare qualunque numero.

Queste parole vedute fin qui servono ad esprimere i numeri interi. In quanto ai numeri fratti non si dovrà far altro se non che esprimere in quante parti uguali si è divisa l'unità dopo che si saranno nominate le parole dette dianzi, le quali esprimono quante di queste parti contiene la frazione. Ciò fassi collo esprimere il nome, o come suol dirsi, la *denominazione* della parte aliquota dell' unità. Secondo che l' unità vien divisa in due, tre, quattro ec. parti uguali, le denominazioni delle parti aliquote sono *un mezzo, un terzo, un quarto, un quinto, un sesto, un settimo, un ottavo, un nono, un decimo, un undicesimo, un dodicesimo,* e così appresso mettendo sempre la desinenza *esimo* alle parole onde si esprimono i numeri interi. Ecco dunque, per esempio, le enunciazioni di alcuni numeri fratti: *tre quarti, cinque settimi, trentacinque noni, centotrentadue tredicesimi.*

17. Riepilogando il fin qui detto, si può conchiudere che le parole le quali, mediante le convenzioni sin qui esposte, servono a formare tutte le altre per l'enunciazione di qualunque numero sia intero, sia fratto, sono le seguenti: *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, cento, mille, milione.*

18. Osservazione. Allorchè un numero intero è espresso da una sola unità dei vari ordini, eccetto il primo che non è un numero,

chiamasi *decimale*, perch'esso allora è appunto la collezione di dieci unità dell'ordine antecedente, come *dieci, cento, mille, diecimila* ec. Dicesi poi *frazione decimale* quella che contiene *decimi, centesimi, millesimi* ec. dell'unità, cioè quando il numero di parti uguali in cui l'unità è stata divisa è espresso da un intero decimale. Ogni frazione che non è decimale dicesi *ordinaria*.

19. Numerazione scritta. Il bisogno che l'uomo ha di calcolare speditamente i numeri gli ebbe tosto suggerita l'idea di rappresentarli colla scrittura per mezzo di alcuni segni o caratteri particolari, in cambio di scrivere le parole onde si enunciano, la qual cosa lungi dal prestargli un'agevolazione, sarebbegli anzi stato d'imbarazzo. Gli fu poi naturale l'altra idea di servirsi a tal uopo di pochi segni combinati fra loro con alcune convenzioni stabilite, come avea fatto per le parole, a fine di aiutare la sua memoria.

Ma se, come abbiamo già detto, gli uomini si accordarono tutti nella numerazione parlata, il simile non è sempre avvenuto della numerazione scritta. La ragione è che la prima derivò da naturali disposizioni comuni a tutti gli uomini, la seconda dalla maggiore o minore sagacia dei dotti. Gli antichi ebbero per iscrivere i numeri alcune convenzioni pochissimo acconce alla facilità dei calcoli, perchè esse non corrispondevano dell'intutto a quelle della numerazione parlata. In quanto al sistema di numerazione scritta dei Greci e dei Latini si consulti la nota C posta in fine dell'aritmetica.

Ma la numerazione scritta dei moderni è comune a tutti; essa è dedotta immediatamente dalla numerazione parlata, ed è però la più semplice e la più regolare; e l'aritmetica ne ricevette il suo principale avanzamento. Gl'Indiani ne furono i felici inventori, dai quali poi gli Arabi l'appresero; e il celebre Gerberto, che fu poi pontefice col nome di Silvestro II, la portò verso il 1000, ritornando da un suo viaggio d'Egitto, nella Spagna, donde poi ella si diffuse per tutta l'Europa.

20. A volere ben ravvisare l'analogia perfetta ch'ella ha con la numerazione parlata, e la sua estrema semplicità si consideri il quadro qui sotto e veggasi com'esso è dedotto intieramente da quello già veduto di sopra.

6ª classe	5ª classe	4ª classe	3ª classe	2ª classe	1ª classe
1,1,1,	1,1,1,	1,1,1,	1,1,1,	1,1,1,	1,1,1,
2,2,2,	2,2,2,	2,2,2,	2,2,2,	2,2,2,	2,2,2,
3,3,3,	3,3,3,	3,3,3,	3,3,3,	3,3,3,	3,3,3,
4,4,4,	4,4,4,	4,4,4,	4,4,4,	4,4,4,	4,4,4,
5,5,5,	5,5,5,	5,5,5,	5,5,5,	5,5,5,	5,5,5,
6,6,6,	6,6,6,	6,6,6,	6,6,6,	6,6,6,	6,6,6,
7,7,7,	7,7,7,	7,7,7,	7,7,7,	7,7,7,	7,7,7,
8,8,8,	8,8,8,	8,8,8,	8,8,8,	8,8,8,	8,8,8,
9,9,9,	9,9,9,	9,9,9,	9,9,9,	9,9,9,	9,9,9,
3ª classe — bilioni		2ª classe — milioni		1ª classe — unità	

È manifesto che in ogni colonna sono sempre ripetuti gli stessi segni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i quali rappresentano successivamente i numeri *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.* Questi segni hanno il nome di cifre arabe da quelli che ce le trasmisero. Ora siccome si è veduto nel primo quadro che le nove parole della prima colonna, si ripetevano sempre in tutte le altre, ponendovi appresso il nome delle unità rispettive, così pure si vede che nel secondo basterà ricordarsi il posto, o sia ranco della colonna che rappresenta ciascuna unità, e così secondo che la stessa cifra sarà scritta in colonne diverse, rappresenterà sempre la collezione medesima, ma di unità di ordini differenti. Di maniera che si è stabilito che *ogni cifra ha un valore assoluto*, *cioè ch' esprime sempre la stessa collezione di unità*, *ed un altro relativo o di sito, cioè che l'unità può essere di ordine vario*. È siccome procedendo da destra a sinistra ciascuna unità è decupla dell' antecedente, così è stata anche stabilita la convenzione che *ogni cifra scritta a sinistra di un'altra esprime una collezione di unità decuple delle antecedenti*, *o*, *che torna lo stesso*, *ha un valor decuplo*, *di quello che avrebbe se fosse nel posto antecedente*.

Adunque la cifra 5, per esempio, scritta sola, come la si vede, rappresenta cinque unità semplici; e però si legge *cinque.* Delle cifre 348 poste, come sono, l'una accanto dell'altra, la prima a destra rappresenta otto unità, la seconda quattro decine, e la

terza tre centinaia; onde, seconda l'enunciazione assegnata nella numerazione parlata a questo numero, lo si leggerà: *trecento quarantotto.*

Da ciò si vede chiaramente che scrivendo un numero in cifre, si distinguono le sue unità, le sue decine, le sue centinaia, ec. nello stesso modo ch' enunciandolo, ed in ciò consiste l' analogia perfetta che ha la nostra numerazione scritta con la parlata.

21. Allorchè si enuncia un numero si pronunciano prima le unità dell'ordine più elevato e poi successivamente le altre; ora si comprende che un numero potrebbe non avere tutti gli ordini di unità che seguono il più elevato; così *trecento* non ha nè decine nè unità; e potrebbe solamente non averne alcuni; per esempio *tremila e sette* non ha nè centinaia, nè decine. Per iscrivere questi tali numeri si è inventata la cifra *o* che si pronuncia *zero*, e la si pone nei posti delle unità che mancano; dunque *lo zero non rappresenta, come le altre cifre, le quali perciò diconsi significative, una collezione di unità di ordine qualunque, ma serve solamente a conservare il valor loro a queste cifre, facendo vedere il posto ch' elle occupano.* Adunque *trecento* si scriverà 300; e si noti che senza gli zeri che la seguono, la cifra 3, scritta sola, non occuperebbe più il terzo rango, e però indicherebbe tre unità e non tre centinaia, come si voleva. Parimente *tremila* e *sette* si scriverà 3007.

22. La regola dunque che si dee avere per iscrivere un numero dietro il suo enunciato è la seguente: *Si scrivano le une appresso delle altre, incominciando dalla sinistra, le cifre che rappresentano le centinaia, decine ed unità di ciascuna classe, e se manchino alcuni ordini di unità si pongano altrettanti zeri nei posti ch'esse dovrebbero occupare.* Così il numero *settantatre milioni ottomila trecento cinque* si scriverà 73 008 305.

Da ciò si deduce anche la regola per leggere un numero, quando esso sia scritto in cifre; ed è questa: *Si dividano con virgole le cifre in classi ciascuna di tre cifre, procedendo da destra a sinistra; l'ultima classe potrebbe anche averne una o due, indi, se si voglia leggere nella maniera più regolare, cioè nella francese, si ponga una* m *sulla prima cifra a destra della seconda classe; questa* m *servirà a ricordare che quella è la classe delle migliaia; poi si ponga successivamente 1, 2, 3 ec. sulle prime cifre a destra delle altre*

classi, per indicare che sono quelle dei milioni, bilioni trilioni ec. Fatto questo, si legga ciascuna classe come se fosse sola, incominciando da sinistra, e si pronunci dopo ciascuna il suo nome. Se poi si voglia leggere alla maniera italiana, si ponga successivamente 1, 2, 3 ec. sulle prime cifre a destra delle classi di posto impari, considerando così diviso il numero in classi di sei cifre, e si legga ciascuna classe ternaria come se fosse sola, pronunciando la voce mila *dopo ciascuna classe di posto pari, e il nome cui corrisponde la cifra sovrapposta dopo quelle di posto impari.*

Così se il numero

3789300405160349

si voglia leggere alla maniera francese, lo si preparerà prima nel modo che si vede qui sotto

$$\overset{4}{3},78\overset{3}{9},30\overset{2}{0},40\overset{1}{5},16\overset{m}{0},349$$

e poi si leggerà: *tre quatrilioni, settecento ottantanove trilioni, trecento bilioni, quattrocento cinque milioni, cento sessantamila, trecento quarantanove.*

Per leggere lo stesso numero alla maniera italiana, lo si dividerà prima come segue

$$3,789^2,300,405^1,160,349.$$

ed indi si leggerà: *tremila settecento ottantanove bilioni, trecentomila quattrocento cinque milioni, cento sessantamila trecento quarantanove.*

Si noti che il milione francese è lo stesso che l'italiano, ma i bilioni, trilioni ec. sono differenti, perocchè un bilione italiano equivale a mille bilioni francesi, ovvero al trilione francese, un trilione italiano a un milione di trilioni francesi, ovvero a un quintilione francese, e così seguitando.

23. È mestieri che i principianti si esercitino molto a leggere ed a scrivere i numeri, a fine che arrivino al punto di fare le divisioni dette di sopra ad occhio, e senza il bisogno delle virgole e delle cifre sovrapposte; al qual proposito sappiano che l'uso di

quelle virgole e di quelle cifre non si è indicato se non per agevolar loro l'esercizio di leggere e scrivere i numeri; ma sarebbe un errore lo scrivere un numero, distinguendone le cifre in classi colle virgole, per fare che altri possa leggerlo agevolmente, perchè se costui sa che significhi quella divisione, potrà farla col pensiere, e poi leggere; se l'ignora, quella divisione è inutile. Oltre di ciò, questa maniera di scrivere un numero intero potrebbe confonderlo con una frazione decimale, come si vedrà in appresso. Solo sarebbe permesso di distinguere le classi come noi abbiamo già fatto più sopra, scrivendole alquanto lontane le une dalle altre, come vedesi in questo numero 35 731 527.

Per brevità chiameremo *semplice* un numero intero quando è espresso da una sola cifra, perch'esso contiene allora solamente unità semplici; *composto* quando è rappresentato da più cifre.

24. Siccome dalla numerazione parlata dei numeri interi si è dedotta quella delle frazioni, così pure la numerazione scritta dei fratti si dedurrà da quella dei numeri interi. La regola è questa: *Per iscrivere un numero fratto si ponga al di sotto di una lineetta orizzontale il numero ch' esprime in quante parti uguali si è divisa l'unità, e al di sopra il numero chè indica quante di queste parti contiene quel fratto.* Così *tre settimi* si scriverà, $\frac{3}{7}$. Il 7, cioè il numero che indica in quante parti uguali si è divisa l'unità, chiamasi il *denominatore* della frazione, il 3, cioè il numero ch'esprime quante di queste parti contiene quel fratto, dicesene il *numeratore*. Il numeratore e il denominatore si dicono poi *termini* della frazione.

La lettura delle frazioni è manifesta da ciò che si è detto nella loro numerazione parlata; così le espressioni $\frac{25}{9}, \frac{4}{73}, \frac{1}{2}$, e simili, si leggono: *venticinque noni, quattro settantatreesimi, un mezzo.*

E chiaro che *quando il numeratore è uguale al denominatore, la frazione è uguale all'unità;* essa infatti contiene allora tante di quelle parti in cui l'unità si è divisa, quante ne contiene essa unità. Così le frazioni $\frac{3}{3}, \frac{25}{25}, \frac{783}{783}$, e simili, sono tutte uguali all'unità e quindi anche uguali fra loro.

Quando il numeratore è maggiore del denominatore, la frazione è spuria; perchè essa contiene allora più parti uguali che l'unità; così le frazioni $\frac{35}{7}$, $\frac{9}{2}$, sono spurie.

Quando il numeratore è minore del denominatore la frazione è vera; perchè essa contiene così meno parti uguali che l'unità. Per esempio, le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{13}$, e simili, sono vere.

25. Si è detto già che le frazioni decimali sono quelle che contengono decimi, centesimi, millesimi ec. dell'unità, ovvero quando il numero di parti uguali in cui si è divisa l'unità è espresso da un intero decimale; ora dalla numerazione scritta degli interi risulta che un numero intero decimale è espresso dall'unità seguita da uno o più zeri; dunque si può anche dire che *una frazione si chiama* decimale *quando ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri*.

Le frazioni decimali hanno sulle ordinarie il vantaggio di potersi scrivere in un modo più semplice; il che, come si vedrà in appresso, facilita ed abbrevia di molto la via di calcolarle. Si è stabilito innanzi che una cifra scritta a sinistra d'un'altra esprime una collezione di unità decuple delle antecedenti; per conseguenza una cifra scritta a destra di un'altra esprimerà una collezione di unità delle quali ciascuna è decima parte dell'antecedente. Ora continuando a ritenere una tal convenzione per le cifre scritte a destra della cifra che rappresenta unità semplici, si avrà che ponendo una cifra a destra di quella delle unità semplici, essa esprimerà *decimi* dell'unità; scrivendo un'altra cifra a destra dei decimi, rappresenterà *centesimi*, e così di seguito. In tal modo dunque le frazioni decimali si potranno scrivere nello stesso modo che i numeri interi, avvertendo però solo di distinguere con una virgola il posto delle unità semplici da quelli delle altre unità più elevate, e delle unità che sono sue parti aliquote. In questo modo partendo dalle unità semplici e procedendo da destra a sinistra, si avranno successivamente unità decuple, centuple, milluple, ec. di essa unità semplice, procedendo da sinistra a destra si avranno unità decime parti, centesime parti, millesime parti, ec. dell'unità semplice; com'è visibile qui appresso.

. . . 1	1	1	1	1 ,	1	1	1	1	1 . . . .
decine di migliaia	migliaia	centinaia	decine	unità	decimi	centesimi	millesimi	diecimillesimi	centomillesimi

Si chiama *parte intera* quella che è a sinistra della virgola, perchè in essa non sono che numeri interi; la *parte decimale* è quella ch'è a destra della virgola.

Adunque la frazione decimale $\frac{3464}{100}$, scritta così alla maniera ordinaria si scriverà alla nuova maniera indicata, così: 34,64, e si potrebbe leggere, come la prima, *tremila quattrocento sessantaquattro centesimi*; ma per distinguere col linguaggio, come si fa colla scrittura, la parte intera dalla decimale, si legge a preferenza *trentaquattro interi e sessantaquattro centesimi*; la quale ultima espressione è del tutto equivalente alla prima. Nello stesso modo le espressioni

$$\left.\begin{array}{r} 73{,}004 \\ 5{,}97 \\ 2{,}0049 \\ 0{,}03 \\ 0{,}5 \end{array}\right\} \text{corrispondono a} \left\{\begin{array}{l} \frac{73004}{1000} \\ \frac{597}{100} \\ \frac{20049}{10000} \\ \frac{3}{100} \\ \frac{5}{10} \end{array}\right.$$

Dai quali esempi è manifesto che *per iscrivere nella nuova maniera una frazione decimale rappresentata prima nella maniera ordinaria, bisogna porre tante cifre nella parte decimale quanti zeri si trovano nel denominatore, scrivendo lo zero in tutti i posti delle unità che mancano, e nella parte intera qualora non ve ne abbia,*

a fine di conservare alle cifre significative il loro posto, e quindi il valor loro.

Segue da ciò che *una frazione decimale è spuria quando vi siano alcune cifre significative nella parte intera, ed è vera quando non ve ne abbiano.*

Qui divien chiaro ciò che si è detto innanzi, che non si debbono cioè mettere le virgole per la distinzion delle classi, quando si scrive un numero intero. In fatti se si trovasse scritto 32,574 si potrebbe dubitare se questa espressione indica il numero intero *trentaduemila cinquecento settantaquattro*, o la frazione decimale *trentadue interi e cinquecento settantaquattro millesimi.*

26. Osservazione. Dalle cose dette sulla numerazione scritta segue 1° che per giudicare della grandezza di un numero intero per rispetto a un altro non si dovrà por mente al valore di ciascuna cifra in particolare, ma sì al numero di esse cifre; così è chiaro che 12567>899, benchè ciascuna cifra del primo sia minore di ciascuna cifra del secondo. Quando poi il numero delle cifre sia lo stesso nei due numeri, si dovrà far giudizio dal valore della prima cifra a sinistra; così 8312>6984, perchè 8>6, benchè tutte le rimanenti cifre del primo siano di minor valore che tutte le rimanenti del secondo. Qualora il numero delle cifre sia lo stesso e le prime a sinistra siano uguali, si giudicherà dalla seconda; se le due prime a sinistra siano uguali, si giudicherà dalla terza, e così in appresso.

2.° Per giudicare della grandezza relativa di due frazioni decimali, bisogna prima badare alla parte intera; è chiaro, per esempio, che 58,38>,17,9835743569, perchè 58>17;3,5>0,87934567123, perchè 3>0. Qualora la parte intera o sia zero, o la stessa, si dovrà giudicare dalla parte decimale. In questa poi, al contrario che nei numeri interi, non si dovrà por mente al numero delle cifre, ma sì al valor loro particolare, incominciando da sinistra; così è chiaro che 3,8>3,1297834, perchè 8>1;0,58>70, 56347, perchè 8>5, che sono le cifre dei centesimi.

3.° Secondo che a destra di un numero intero si scriva uno, due, tre ec. zeri, il numero divien decuplo, centuplo, milluplo ec. del suo valore primitivo; per conseguenza, secondo che a destra di un numero terminato da alcuni zeri, si sopprima uno, due,

tre ec. di questi zeri, il numero diviene decima parte, centesima parte, millesima parte ec. del suo valore primitivo; così si vede che 30 è decuplo di 3, che 27 000 è milluplo di 27; dai quali esempi si vede insieme che 3 è decima parte di 30, e che 27 è millesima parte di 27000. È poi chiaro che sarebbe inutile di scrivere alcuni zeri a sinistra di un numero intero, perchè il suo valore rimane così sempre lo stesso; laonde mai non si troveranno espressioni simili a queste 002; 00027.

4.° Il contrario avviene nella parte decimale di una frazione decimale, cioè ponendo a destra quanti zeri si vogliano il valore non cangia, e, secondo che si pone a sinistra uno, due, tre ec. zeri, il valore diviene decima parte, centesima parte, millesima parte del primitivo; così 0,34=0,340=0,34000; ma 0, 043 è decima parte di 0,43, perchè i decimi di quest' ultimo sono divenuti centesimi, ed i centesimi millesimi; dunque, essendosi presa la decima parte di ciascuna cifra del numero, si è presa la decima parte di esso numero. Così pure 0,00027 è millesima parte di 0,27;0,0000458 è centesima parte di 0,00458.

Riepilogando quanto si è detto circa la numerazione scritta, si può conchiudere che con le sole cifre 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, si può scrivere, mediante le convenzioni stabilite, qualunque numero, sia intero, sia fratto.

27. Osservazione generale. Si osservi che tanto nella numerazione parlata quanto nella numerazione scritta, si sono trattati prima i numeri interi e poscia le frazioni, e che dalla maniera di pronunciare e scrivere i primi si è dedotta quella di pronunciare e scrivere i secondi; e questo pure sarà il metodo che si terrà in appresso. Ed in fatti è più semplice e più naturale, e perciò vien prima nel nostro spirito, il considerare i numeri come interi, cioè il considerare come unità una delle parti uguali ond' ei si compongono, senza paragonare questa parte a una grandezza maggiore dello stesso genere. E qui cade in acconcio di osservare che il numero metafisico è essenzialmente intero, o per parlare con più proprietà, uno è il concetto del numero, e non si può questo concetto dividere in due altri che siano in qualunque parte differenti. Adunque allorchè si aggiungerà ad un numero l'idea ch' esso sia o intero o fratto, questa idea non

sarà che una maniera accidentale e particolare di considerare il concetto uno e astratto del numero; nascerà dall'applicare questo concetto alle cose numerabili, ai numeri concreti; perchè allora solamente avviene che stabilita la grandezza di una di queste cose per termine di paragone di tutte le altre, secondo che la grandezza di un'altra, conterrà varie volte esattamente questa unità, o una sua parte aliquota, l'espressione di questa grandezza sarà un numero intero o un numero fratto; ma nell'idea metafisica del numero, o, che suona lo stesso, di *moltitudine*, di *pluralità*, queste distinzioni non trovan punto luogo anzi non hanno significazione alcuna. Ben mi si dirà che un numero intero o fratto, si può anche enunciare, come si fa spesse volte astrattamente, senza determinare la natura dell'unità, e così, potrebbesi conchiudere, esistono numeri astratti interi e frazionari, e non è punto bisogno ch'ei siano concreti. Noi risponderemo, che questo è stato già detto anche da noi più sopra, e che la quistione non versa su di ciò; e l'obbiezione che ci siamo fatta noi medesimi potrebbe solo venire da chi non ha idea chiara del numero astratto. Il considerare un numero intero o frazionario come astratto, significa, ch'essendo le leggi della formazione di tali numeri le stesse per qualunque si fosse la natura delle cose numerate, e quindi anche le stesse le proprietà di essi numeri, non importa di considerare l'unità di una natura piuttosto che di un'altra, epperò si fa a meno di nominare quest'unità; ma con ciò non si toglie che l'idea dei numeri interi e fratti sia nata dall'applicare il concetto metafisico del numero al fatto della numerazione delle quantità. In somma il numero astratto nel senso matematico non è che l'idea generale dei numeri concreti, ed è affatto diverso dal concetto filosofico del numero, ch'è generalmente quello di pluralità. Il Poinsot in una sua memoria letta il 10 maggio 1841 nell'accademia delle scienze di Parigi, richiamando l'attenzione dei matematici sul vero oggetto delle loro scienze, svolge, come cosa di grande utilità, il concetto esposto da noi in germe con queste poche parole; e gli studiosi progredendo nella scienza del calcolo vedranno di quanta importanza sono queste considerazioni, e quanto riprensibile e poco proficuo sia l'andazzo della più gran parte dei libri elementari, nei quali, non facendosi niun conto

d'idee sì momentose, anzi oscuramente accennandole senza avervi prima meditato sopra profondamente, si entra subito nelle aridezze e particolarità delle formole, non avendo prima messi in chiara luce i principî generali ov'elle si appoggiano [1].

Assiomi.

28. Le matematiche pure, come ogni altra scienza speculativa ed astratta, si compongono tutte di una serie, o, come dirò, di una catena di verità, le quali si deducono successivamente l'una dall'altra, e ci conducono così ad avere una cognizione per quanto più si possa chiara e distinta della quantità considerata sotto le due forme in cui ci si presenta, ovvero dell'estensione e dei numeri. Il primo anello di questa catena, o sia le verità prime e fondamentali da cui parte il nostro spirito per giungere a mano a mano alle altre, sono alcune proposizioni evidenti da per sè, tali cioè ch'enunciandole solamente si comprendono, senza che sia mestieri dimostrarle. Queste verità evidenti, queste notizie inconcusse e comuni, si dicono *assiomi*. Ora siccome dall'aritmetica e dalla geometria elementare ha principio lo studio delle matematiche, e propriamente dalla prima quello dell'algoritmia, dalla seconda quello della geometria, prendendo questa parola nel suo più ampio significato; così è appunto da queste due branche fondamentali della scienza che fa bisogno prender le mosse degli assiomi.

Noi quindi verremo qui esponendo quegli assiomi, dei quali faremo uso in appresso per lo più tacitamente, a cagione della estrema loro chiarezza.

I. Due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

II. Il tutto è maggiore di ciascuna sua parte.

III. Il tutto è uguale alla somma di tutte le parti nelle quali è stato diviso.

[1] *Or, n'y a-t-il pas lieu de s'étonner que depuis vingt-trois ans que cette vérité a été proclamée, il ne se soit pas trouvé un auteur d'éléments qui ait songé à consacrer ce qu'elle a d'utile, sinon dans ses divers détails, du moins dans sa base, dans la définition du mot nombre?* Vallès Études philosophiques sur la science du calcul. chap. II. sect. II.

IV. Se a quantità uguali si aggiungano altre quantità uguali, le somme saranno uguali.

V. Se da quantità uguali si tolgano altre quantità uguali, i residui saranno uguali.

VI. Se a quantità disuguali si aggiungano quantità uguali le somme saranno disuguali.

VII. Se da quantità uguali si tolgano quantità disuguali, o se da quantità disuguali si tolgano quantità uguali, i residui saranno disuguali.

VIII. Il doppio, triplo, quadruplo ec. del tutto contiene i doppi, tripli, quadrupli ec. delle parti in cui è stato diviso, e per conseguenza la metà, terza parte, quarta parte; ec. del tutto contiene le metà, terze parti, quarte parti ec. di tutte le parti in cui è stato diviso.

IX. Ogni quantità si può immaginar divisa in qualsivoglia numero di parti uguali.

Tutte le altre verità che non si comprendono chiaramente, come queste, dal solo enunciato, ma che divengono evidenti dietro un ragionamento che si chiama dimostrazione, diconsi *teoremi*. Anche daremo il nome di *problema* ad una questione proposta la quale richiede una soluzione.

Questi assiomi, queste verità necessarie e che punto non derivano dall'esperienza, sono quei giudizi, che i logici dicono *puri*, ed è però che le matematiche le quali sono tutte fondate su di essi, si dicono medesimamente *pure*. Dal non poter essere poi in niun modo revocati in dubbio gli assiomi, nè quindi tutte le altre verità, che si vengono a mano a mano derivando da essi leggittimamente, cioè secondo le leggi del raziocinio, si comprende perchè le matematiche vanno ancora distinte col nome di *scienze esatte*.

Idea generale del calcolo aritmetico.

29. L'aritmetica, come si è detto innanzi, studia i numeri sotto il solo particolare aspetto della loro generazione elementare. Ora la generazione primitiva e più semplice dei numeri si è quella che

consiste nell' aggiungere successivamente a sè stessa o l'unità, o una sua parte aliquota; donde nascono i numeri interi e i numeri fratti che sono le sole specie di numeri possibili; dunque si può dire anche che l'aritmetica insegna a comporre i numeri. Ma l'idea di composizione racchiude in sè quella di scomposizione, perchè se, per esempio, si concepisce che i numeri 3 e 5 aggiunti l'uno all'altro formano il numero 8, si concepirà nello stesso tempo, anzi sarà una idea sola, che il numero 8 si scompone nelle due parti 5 e 3; dunque l'aritmetica insegna ancora a scomporre i numeri. La composizione e la scomposizione dei numeri, benchè rimangano sempre sostanzialmente le stesse, ci possono tuttavia presentare vari casi, i quali costituiscono le differenti *operazioni* che possono eseguirsi sui numeri, ciò sono l'*addizione*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione*, la *divisione*, l'*innalzamento a potenza*, e l'*estrazione di radice*. L'insieme delle regole da seguire per effettuare queste operazioni costituisce il *calcolo aritmetico*.

Ora è necessario che prima di venire alla spiegazione particolare di queste regole, si esamini in generale quali sono questi differenti casi che la composizione e la scomposizione dei numeri ci offre, a fine che si abbia l'idea più chiara e perfetta di ciascuno di essi casi, e si vegga in che propriamente differiscono l'un dall'altro. Una tale disamina dandoci la più precisa idea del calcolo aritmetico, ci fornirà come una luce suprema per non perdere mai di mira l'obbietto unico e generale dell'aritmetica, e non farci parere oscure e senza legame o scopo comune tutte le particolarità a cui dovremo discendere in appresso.

30. Definizione I. *L'addizione è quella operazione del calcolo aritmetico che ha per obbietto di trovare un numero il quale contenga tutte le unità e parti di unità di altri numeri dati.*

Questo numero che si cerca, dicesi *totale* o *somma*.

Per brevità indicheremo l'addizione col segno + che si pronunzia *più*; col segno = posto tra due quantità si esprimerà che quelle due quantità sono uguali; così $5+3+4=12$ significherà che il numero 12 è la somma dei tre 5, 3, 4; e si leggerà: *cinque più tre più quattro è uguale a dodici*.

Allorchè due espressioni numeriche che si sono dimostrate uguali, o che si possono dimostrar tali, si uniscono col segno =, l'e-

spressione intiera che si ha dicesi *uguaglianza* [1]. La quantità posta a sinistra del segno = dicesi *primo membro* dell'uguaglianza, l'altra *secondo membro*. Qualora le due quantità siano identicamente le stesse, cioè che la loro uguaglianza sia visibile, senza che sia mestieri dimostrarla, l'espressione prende il nome di *identità*. Così $3=3$ è una identità, al pari di $3+7=3+7$, e simili.

31. Dalla definizione stessa dell'addizione risulta che *se si aumenti o si diminuisca di una quantità uno dei numeri da sommarsi, la somma viene ad essere aumentata o diminuita di quella stessa quantità*. Così $5+7$ supera $5+4$ di 3, perchè 7 supera 4 di 3; e viceversa $5+4$ manca da $5+7$ di 3, perchè 4 manca da 7 di 3.

Di qui si deduce che *aumentando uno dei numeri da sommarsi di una quantità e diminuendo simultaneamente un'altro della stessa quantità, la somma non cangia*. Così avremo

$$1+7=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2=7+1$$

Da queste uguaglianze è pure manifesto che qualunque sia l'ordine con che si sommino più numeri, la somma è sempre la stessa; la quale verità era già d'altra parte una conseguenza immediata del concetto dell'addizione fornitoci dalla definizione di essa.

32. Definizione II. *La sottrazione è quella operazione che ha per obbietto di trovare un numero che aggiunto ad un dato numero, riproduca un altro numero dato.*

Se si ha, per esempio, $5+3=8$, e dati i due numeri 8 e 3 si vuol trovare un altro numero che aggiunto a 3 dia 8, questo sarà 5. Da ciò si vede che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione; perchè in essa data la somma di due numeri e uno

[1] Alcuni autori, come il Francoeur, si servono nell'aritmetica della voce *equazione*; ma bene osserva il Fourcy che questo linguaggio è inesatto. Il vocabolo *equazione* è solamente proprio dell'algebra, ed indica che le due espressioni non sono sempre uguali, ma solo per alcuni valori particolari di certe quantità che sono le ignote. *Quand on parle* d'équations, *on doit toujours entendre qu'il ya des inconnues à trouver.. Le mot* égalité *rappelle des quantités qui sont actuellement égales, mais dont l'egalité doit être démontrée, si elle ne l'a déjà été. Enfin* l'identité *est une égalité évidente d'elle même*. Fourcy-Leçons d'algèbre.

di questi numeri, si vuol trovare l'altro. Ora dall'esempio addotto è chiaro che il numero 5 si ottiene togliendo da 8 unità 3 unità; dunque la definizione che abbiam data della sottrazione è la medesima, benchè in altri termini, che questa: *La sottrazione è quella operazione che ha per obbietto di togliere da un dato numero tutte le unità e parti di unità di un altro numero dato minore.* Questa definizione corrisponde anche alla etimologia della parola *sottrazione*.

Il numero da sottrarsi chiamasi, *sottrattore;* quello da cui si dee sottrarre *sottraendo.* [1] Il risultamento dell'operazione dicesi indifferentemente *residuo, eccesso*, o *differenza*.

La sottrazione si indica col segno — che si pronunzia *meno;* così l'espressione 8—3=5 significa che 8 *meno* 3 *è uguale a* 5. Qui 8 è il sottraendo, 3 il sottrattore, e 5 il residuo, ovvero l'eccesso, ovvero la differenza, perocchè si può dire che da 8 tolto 3 resta 5, ovvero che 8 supera 3 di 5, o che 5 è la differenza tra 8 e 3; queste espressioni, come si vede, sono equivalenti.

33. Dalla definizione della sottrazione si deduce immediatamente che il *sottrattore e il resto, sommati insieme, debbono dare il sottraendo.*

34. Di più dall'essere il sottraendo la somma del sottrattore e del resto, si ha pure, per quello che si è detto dell'addizione (31), che *aumentando o diminuendo di una quantità il sottraendo, senza alterare il sottrattore, il residuo si aumenta o si diminuisce di quella quantità; e che aumentando o diminuendo di una quantità il sottrattore, senza alterare il sottraendo, il residuo si diminuisce o si aumenta di quella quantità.* Così 8—3 supera 5—3 di 3, perchè 8 supera 5 di 3, e viceversa 5—3 manca da 8—3 di 3. Inoltre 8—3 manca da 8—1 di 2, dacchè il sottrattore 3 supera di 2 il sottrattore 1, e viceversa, perchè 1 manca da 3 di 2, 8—1 supera 8—3 di 2.

[1] In verità queste parole sono erronee e dovrebbero più tosto esser prese in senso inverso: così quello che abbiamo chiamato *sottrattore* dovrebbe dirsi *sottraendo*, perchè *sottraendo* suona appunto *che deve sottrarsi.* Tuttavolta a noi non è piaciuto di cangiare il linguaggio che da tutti si adopera, perchè riteniamo che non si vuol contraddire all'uso, *quem penes arbitrium est et jus et norma loquendi.*

Da ciò s'inferisce che *aumentando o diminuendo simultaneamente della stessa quantità tanto il sottraendo, quanto il sottrattore, il residuo non cangia*. Così $5-3=8-6=10-8=13-11=$ec.

35. DEFINIZIONE III. *La moltiplicazione è quella operazione che ha per obbiettò di trovare un numero che sia formato con un numero dato, come un altro numero dato è formato con l'unità.*

Così moltiplicare, per esempio, 3 per 4 significherà formare un terzo numero con 3 come 4 si è formato con l'unità; ora $4=1+1+1+1$; dunque il numero cercato sarà uguale a $3+3+3+3$, cioè a 12.

Il numero da moltiplicarsi dicesi *moltiplicando*; quello per il quale si moltiplica *moltiplicatore*; il risultamento dell'operazione si chiama *prodotto*; il moltiplicando e il moltiplicatore si dicono *fattori* del prodotto. Nell'esempio di sopra 3 è il moltiplicando, 4 il moltiplicatore, 12 il prodotto; 3 e 4 poi sono i fattori di 12.

La moltiplicazione si indica col segno $\times$ che si pronunzia *moltiplicato per*; così l'espressione $3\times4=12$ significa che 3 moltiplicato per 4 è uguale a 12. Si può anche mettere un punto tra i due fattori e scrivere $3.4=12$.

Sia da moltiplicarsi $\frac{2}{7}$ per 3; secondo la definizione il prodotto sarà formato con $\frac{2}{7}$ come si è formato 3 con l'unità; ora $3=1+1+1$; dunque $\frac{2}{7}\times3=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$, cioè $\frac{6}{7}$, perchè è chiaro che 2 settime parti dell'unità, più 2 settime parti più ancora due altre settime parti formano 6 settime parti di essa unità.

36. Dai due esempi addotti $3\times4=12$ e $\frac{2}{7}\times3=\frac{6}{7}$, nei quali i moltiplicatori 4 e 3 sono due numeri interi, si vede che i prodotti 12 e $\frac{6}{7}$ sono maggiori dei rispettivi moltiplicandi 3 e $\frac{2}{7}$, e che propriamente 12 contiene 3 quattro volte, avvero è quadruplo di 3, e $\frac{6}{7}$ contiene $\frac{2}{7}$ tre volte, cioè è triplo di $\frac{2}{7}$. Generalmente *quando il moltiplicatore è un numero intero, il prodotto è un multiplo del moltiplicando, e propriamente lo contiene tante volte quan-*

te sono le unità del moltiplicatore. Questo caso della moltiplicazione non è altro che un'addizione nella quale tutti i numeri da sommarsi sono uguali fra loro; e solamente a questo caso particolare corrisponde, come si vede, l'etimologia della parola *moltiplicazione*, non che quella delle altre *moltiplicando* e *moltiplicatore.*

37. Ma la definizione da noi data ci porge della moltiplicazione un'idea più generale che non è quella dell'etimologia di questo vocabolo. Infatti *quando il moltiplicatore non sia un intero, ma sì una frazione, il prodotto non è più un multiplo del moltiplicando.* Per esempio, se si voglia moltiplicare 3 per $\frac{5}{7}$, si dee formare, secondo la definizione, il prodotto con 3 come $\frac{5}{7}$ è stato formato con l'unità; ora, conforme a ciò che si è detto nel n° 3 circa la formazione dei numeri fratti, $\frac{5}{7}$ è stato formato con l'unità, dividendo questa unità in sette parti uguali e poi prendendo cinque di queste parti; dunque il prodotto $3 \times \frac{5}{7}$ sarà formato medesimamente prendendo cinque settime parti di 3. Per avere la settima parte di 3 si noti che $3=1+1+1$; dunque la settima parte di 3, ch'è il tutto, conterrà per il noto assioma, le settime parti di tutte quelle parti in cui è stato diviso, e sarà quindi $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$; il prodotto dovendo essere cinque volte questa settima parte, sarà $\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}$ ovvero, com'è chiaro, $\frac{15}{7}$; [1].

[1] Ad alcuni potrebbe dispiacere che noi qui in sul principio facciamo trovare il prodotto di un intero per una frazione; cosa che dovrebbe, come sarà di nuovo, essere trattata più innanzi. Ma noi preghiamo questi tali di osservare che qui le dimostrazioni derivano immediatamente dagli assiomi, e però sono facilissime pei principianti. Oltracciò, in ogni caso, non è egli da perdonare una cosa di sì lieve momento, a petto del gran vantaggio che si ha di considerare il calcolo aritmetico sotto il suo più generale aspetto, e in tutti i suoi casi possibili?

dunque $3\times\frac{5}{7}=\frac{15}{7}$. Nel quale esempio si vede che $\frac{15}{7}$ non è un multiplo di 3, perchè ripetendo 3 quante volte si voglia, non si può mai avere una frazione; di più si vede che $\frac{15}{7}$ è minore di 3; infatti $3=1+1+1$; ma $1=\frac{7}{7}$; dunque $3=\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=\frac{21}{7}$; ora è chiaro che $\frac{21}{7}$ è maggiore di $\frac{15}{7}$. Dunque si può conchiudere che *quando il moltiplicatore è una frazione vera, il prodotto è minore del moltiplicando, e però non un multiplo.* Con un ragionamento affatto simile si proverà che *quando il moltiplicatore è una frazione spuria il prodotto è maggiore del moltiplicando, ma non un multiplo.*

Veramente in questo caso che il moltiplicatore sia una frazione, non si può dire che la parola *moltiplicare* sia usata del tutto impropriamente, perocchè, quantunque non si prenda un multiplo del moltiplicando, tuttavia si prende un multiplo di quella sua parte aliquota indicata dal denominatore della frazione che fa da moltiplicatore. Le sole parole che non corrispondono all' operazione, sono quelle di *moltiplicando* e di *moltiplicatore*, perchè infatti, come abbiamo veduto, non è del primo numero dato, ma sì di una sua parte aliquota che si prende un multiplo, e non è il secondo numero dato, ch' è una frazione, quello che indica quante volte si dee ripetere questa parte aliquota, sibbene il suo numeratore.

38. Definizione IV. *La divisione è quella operazione che ha per obbietto di trovare uno dei fattori di un prodotto dato, quando si conosca l'altro fattore.*

Così, avendo, come sopra, $3\times4=12$, se si voglia dividere 12 per 4, si avrà 3; avendo $\frac{2}{7}\times3=\frac{6}{7}$ se si vuol dividere $\frac{6}{7}$ per 3, si avrà $\frac{2}{7}$. Il numero da dividersi si chiama *dividendo*, quello per cui lo si vuol dividere *divisore*; il risultamento dell'operazione si chiama *quoziente.* Ora in questi due esempi, nei quali i divisori 4 e 3 sono due numeri interi, si sa, per quello che si è veduto

innanzi, che i quozienti 3 e $\frac{2}{7}$ sono minori dei dividendi rispettivi 12 e $\frac{6}{7}$, e che propriamente 12 contiene 3 quattro volte, ovvero 3 è la quarta parte di 12, e $\frac{6}{7}$ contiene $\frac{2}{7}$ tre volte, cioè $\frac{2}{7}$ è la terza parte di $\frac{6}{7}$. In generale dunque *quando il divisore è un numero intero, il quoziente è una parte aliquota del dividendo, e propriamente vi è contenuto tante volte quante unità sono nel divisore; onde questo quoziente si ottiene col dividere il dividendo in tante parti uguali quante sono le unità del divisore; una di queste parti sarà il quoziente.* Questo caso particolare è quello che corrisponde alla etimologia della parola *divisione*, e delle altre *dividendo*, *divisore*; negli altri casi queste parole, benchè impropriamente, si usano a cagione dell'uniformità dell' operazione. L'etimologia della parola *quoziente* corrisponde solo al caso particolarissimo in cui il dividendo e il divisore siano due numeri interi, perocchè solamente allora il risultamento dell' operazione indica quante volte [1] il divisore è contenuto nel dividendo, come è facilissimo di vedere dal primo dei due esempi addotti.

39. Passiamo ora al caso in cui il divisore sia una frazione. Riprendendo l'esempio $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$, se si voglia dividere $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ si avrà, secondo la definizione, 3 per quoziente. Donde conchiuderemo che *quando il divisore è una frazione vera il quoziente è maggiore del dividendo, e però non una parte aliquota.* Similmente si dimostrerà che *quando il divisore è una frazione spuria il quoziente è minore del dividendo, ma non una parte aliquota.*

Per indicare la divisione si fa uso di due punti che si frappongono tra il dividendo e il divisore, così scriveremo $12 : 4 = 3$, $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$, $\frac{6}{7} : \frac{2}{7} = 3$. Ancora, quando il dividendo e il divisore siano due numeri interi, si può indicare la divisione col porre il dividendo al di sopra di una linea orizzontale, e il divisore al di

[1] *Quoziente* deriva dal latino *quoties*, *quante volte*.

sotto; così, com'è chiaro, si verrà a formare una frazione che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore; ora appunto *una frazione non è se non il quoziente che si ha dividendo il numeratore per il denominatore*. Per rendersi convinto di ciò, si osservi che $12 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$; dunque per l'assioma IX, $12:4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, cioè $\frac{12}{4}$; dunque $12:4=\frac{12}{4}$, come si voleva dimostrare.

40. Essendo dunque $12:4=3$, sarà pure $\frac{12}{4}=3$; donde potremo concludere che *quando il numeratore di una frazione spuria è un multiplo del denominatore, la frazione è uguale ad un intero*, e per parlare con più proprietà, *quella espressione avrà la forma di frazione, ma sarà un intero; questo intero sarà composto di tante unità, quante volte il denominatore è contenuto nel numeratore*.

41. Se si voglia dividere 3 per 7, cioè un numero intero per un altro maggiore, si avrà per quello che si è or ora detto, $3:7=\frac{3}{7}$; dunque in generale *quando si vuol dividere un numero intero per un altro maggiore, il quoziente sarà una frazione vera che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore*. Ma si è detto innanzi che quando il divisore è un numero intero il quoziente è una parte aliquota del dividendo, e vi è contenuto tante volte quante unità contiene il divisore (38); dunque nell'esempio $3:7=\frac{3}{7}$, essendo 7 il divisore, cioè un numero intero, il quoziente $\frac{3}{7}$ è la settima parte del dividendo 3; la qual cosa divien chiarissima osservando che $\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{21}{7}$ è uguale a 3, perchè il numeratore è triplo del denominatore; dunque 3 è uguale a $\frac{3}{7}$ ripetuto sette volte, ovvero $\frac{3}{7}$ è la settima parte di 3.

I principianti faranno cosa utilissima a meditare bene una tale osservazione e non mandarla in oblio, perocchè così avranno la più chiara idea della natura di una frazione. Si ricordino dunque che quando abbiano a spiegare il significato di una frazione, per esempio, di $\frac{5}{9}$, potranno dire ch' ella esprime cinque none parti dell' unità, o pure ch'esprime la nona parte del numero 5, queste due espressioni da quello che si è fin qui detto, sono equivalenti.

L'ultima osservazione che ci rimàne a fare sulla divisione si è ch' ella è l'operazione inversa della moltiplicazione.

42. Definizione V. *L' innalzamento a potenza è quella operazione che ha per obbietto di trovare un numero che sia il prodotto di un dato numero di fattori uguali tutti a un numero dato, e quindi anche uguali fra loro.*

Così se si moltiplichi 3 per sè stesso, e poi il prodotto si moltiplichi per 3, e poi il secondo prodotto si moltiplichi ugualmente per 3, e così di seguito, essendosi sempre preso 3 per fattore, l' operazione fatta sarà l'innalzamento a potenza del numero 3. Una potenza dicesi poi, *seconda*, *terza*, *quarta* ec., secondo che il numero dato è preso due volte, tre volte, quattro volte, ec. per fattore. La seconda potenza si suol chiamare più comunemente *quadrato*, e la terza *cubo*, per alcune considerazioni geometriche, che qui non occorre di menzionare.

L' innalzamento a potenza si indica col porre a dritta del numero dato e un poco al di sopra il numero che esprime quante volte lo si vuol prendere per fattore; questo numero si chiama *esponente*, o *grado della potenza*. Così scriveremo 3^2 per indicare il quadrato di 3, e questa espressione equivarrà a 3×3; 3^3 indicherà il cubo di 3, e sarà lo stesso che $3 \times 3 \times 3$; e così appresso avremo $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$, $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, ec.

Quando il numero da innalzarsi a potenza sia una frazione, si chiuderà questa frazione tra due parentesi e si scriverà $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; perchè se si scrivesse $\frac{2^3}{7}$, questa espressione dinoterebbe il cubo

di 2 diviso per 7, e non il cubo della frazione $\frac{2}{7}$, ch' era quello che si voleva indicare.

Si osservi che l' innalzamento a potenza è un caso particolare della moltiplicazione; è propriamente una moltiplicazione in cui i numeri da moltiplicarsi sono uguali fra loro.

43. DEFINIZIONE VI. *L'estrazione di radice è quella operazione che ha per obbietto di trovare un numero che innalzato ad una data potenza, riproduca un numero dato.*

Il risultamento dell'operazione chiamasi *radice* 2ª, 3ª, 4ª ec. del numero dato, secondo che per produrlo dev' essere innalzato a 2ª 3ª, 4ª ec. potenza. Siccome la potenza 2ª si suol chiamare *quadrato*, e la 3ª *cubo*, così pure la *radice* 2ª si dice più comunemente *radice quadrata*, e la 3ª *radice cubica*.

L' estrazione di radice quadrata si indica col segno $\sqrt{}$, postovi sotto il numero dal quale la si vuole estrarre; quella di radice cubica con $\sqrt[3]{}$; quella di radice quarta con $\sqrt[4]{}$, e così di seguito. Onde scriveremo $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt[3]{5^3}=5$, $\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{2}{7}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{7}\right)^3}=\frac{2}{7}$.

È chiaro che l' estrazione di radice è l'operazione inversa dell' innalzamento a potenza.

44. Indicherò qui in ultimo alcuni altri segni di cui faremo uso in appresso. Se si trovasse scritto $(5+7-3)\times 5$, questa sarebbe l'indicazione del prodotto della quantità $5+7-3$ moltiplicata per 5; parimente $\left(4-\frac{1}{3}+6\right)\times(7+8)$ esprimerebbe il prodotto della quantità $4-\frac{1}{3}+6$ per l'altra $7+8$. In generale ciò che si troverà rinchiuso tra due parentesi si dovrà considerare come una sola quantità. Dopo ciò, $\left(5+\frac{1}{7}-3\right):7$ sarà l' espressione del quoziente della quantità $5+\frac{1}{7}-3$ di-

visa per 7; $\left(2-\frac{3}{5}\right):\left(7+\frac{1}{4}-\frac{3}{7}\right)$ indicherà il quoziente della quantità $2-\frac{3}{5}$ divisa per l'altra $7+\frac{1}{4}-\frac{3}{7}$.

Per indicare che due quantità sono disuguali, metteremo fra loro il segno $>$, rivolgendo l'apertura dell'angolo verso la quantità maggiore; così, per esempio, scriveremo $5>3$.

45. È buono di osservare che dalle definizioni date della moltiplicazione e della divisione risulta evidentemente che un numero moltiplicato per l'unità dà per prodotto sè stesso; e che un numero diviso per l'unità dà per quoziente sè stesso, e diviso per sè stesso dà per quoziente l'unità. Così, per esempio, avremo $1\times3=3$, $3:3=1$, $3:1=3$; parimente $1\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}$. $\frac{5}{8}:\frac{5}{8}=1, \frac{5}{8}:1=\frac{5}{8}$.

Dunque *ogni numero può considerarsi come il prodotto dell'unità per sè stesso, o come il quoziente di sè stesso per l'unità.*

46. Ci farà bisogno alcuna volta in appresso di scrivere un numero intero sotto forma di frazione; allora potremo prendere questo numero per numeratore e dargli per denominatore l'unità; perchè, secondo quello che or ora abbiamo detto, un numero si può considerare come il quoziente di sè stesso per l'unità; ora scrivendo, per esempio, $\frac{5}{1}$, questa frazione è il quoziente che si ha dividendo 5 per 1; dunque $\frac{5}{1}=5$.

Se poi si voglia di più che il denominatore non sia l'unità, ma un dato numero intero, allora il numeratore sarà quel numero moltiplicato per il dato numero intero; così se si voglia mettere il numero 5 sotto forma di una frazione che abbia per denominatore 3, questa frazione sarà $\frac{5\times3}{3}$, cioè $\frac{15}{3}$. Infatti la frazione $\frac{5\times3}{3}$, come abbiamo già detto innanzi, è il quoziente di 5×3 diviso per 3; ora dividere 5×3 per 3 significa che dato 5×3 ch'è il prodotto dei due fattori 5 e 3, e dato 3 ch'è uno di questi fat-

tori, si vuol trovare l'altro fattore; questo fattore è dunque 5, e però $\frac{5\times3}{3}=5$, come si voleva dimostrare.

Dal che si vede pure che *un numero moltiplicato e diviso simultaneamente per uno stesso numero, rimane lo stesso.* In sostanza si vengono così a fare due operazioni, delle quali la seconda distrugge l'effetto della prima.

CAPITOLO II.

DELLE PRIME QUATTRO OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI.

Addizione.

47. ***La somma di due o più numeri semplici si ottiene collo aggiungere successivamente a uno di essi tutte le unità degli altri.*** Infatti secondo la definizione II, la somma dee contenere essa sola tutte le unità dei numeri che si vogliono sommare. Così per sommare i due numeri 5 e 4, si dirà $4=1+1+1+1$; dunque per aggiungere 5 a 4, si dee fare successivamente $5+1=6$, $6+1=7$, $7+1=8$, $8+1=9$; e così $5+4=9$. Parimente per eseguire l' addizione dei numeri semplici 3, 9, 5, si troverà, come si è fatto or ora, $3+9=12$, indi nello stesso modo si troverà $12+5=17$; dunque $3+9+5=17$. E in questa maniera si continuerà per quanti numeri semplici si voglia. Le diverse somme che si debbono trovare prima di giungere alla finale, si chiamano *parziali;* così nell' ultimo esempio la somma parziale è una, cioè $3+9=12$. Dagli esempi addotti è chiaro che i numeri da sommarsi si prendono sempre a due a due, e che nella prima somma i due numeri sono sempre semplici; poscia, continuando l'operazione, possono essere uno semplice e l'altro composto; così nell' ultimo esempio prima si sono sommati i due numeri semplici 3 e 9, e si è avuto 12; indi si è sommato il numero composto 12 col semplice 5; e se fossero stati più numeri da sommarsi, questi essendo tutti semplici, e le somme parziali ottenute essendo numeri composti, sarebbesi sempre sommato un numero composto con un numero semplice. Ora si vede chiaramente che sif-

fatte addizioni sono le più semplici, e però facilissime ad eseguire; ed un poco di esercizio è sufficiente per fare che le si possano ritenere a memoria.

48. Qualora poi si abbia a trovare la somma di più numeri composti, l'operazione è più complicata e difficile, e si può facilissimamente errare nell'eseguirla mentalmente; oltre che se i numeri da sommarsi siano di moltissime cifre, ella sarebbe quasi impraticabile. Ma sapendo fare a memoria, come si è veduto essere facilissimo nel n.° precedente, l'addizione di più numeri semplici, evvi un metodo spedito e agevole per eseguire quella dei numeri composti. A volere ben comprendere questo metodo, si osservi che ogni numero composto è la somma delle sue unità, delle sue decine, delle sue centinaia, ec.; così per esempio $534 = 500 + 30 + 4$. Ora, se si voglia la somma dei due numeri composti 384 e 357, si ragionerà così: è chiaro che la somma di questi due numeri, dovendo contenere tutte le unità di entrambi, conterrà tutte le loro unità semplici, tutte le loro decine, e tutte le loro centinaia; ora $584 = 500 + 80 + 4$, e $357 = 300 + 50 + 7$; sommando le unità si ha $7 + 4 = 11$, cioè 1 unità ed 1 decina, sommando le decine $8 + 5 = 13$, ed aggiungendo la decina avuta dalla prima somma parziale, si ottengono 14 decine, che formano 4 decine ed 1 centinaio; indi per la somma delle centinaia si ha $5 + 3 = 8$, a cui aggiunto il centinaio trovato della seconda somma parziale, si ottengono 9 centinaia. Dunque la somma dei due numeri dati $584 + 357$ contiene 1 unità, 4 decine e 9 centinaia, cioè sarà $900 + 40 + 1$, ovvero scrivendolo nella maniera consueta, 941. Si osservi bene che qui l'operazione si è ridotta in sostanza a fare tre addizioni parziali, ciascuna di due numeri semplici; se i numeri da sommarsi fossero stati più di due e avessero anche contenuti più ordini di unità che quello dell'esempio addotto, si sarebbe provato con un ragionamento affatto simile che l'operazione sarebbesi ridotta a fare varie addizioni parziali di più numeri semplici. Così in generale *l'addizione di più numeri composti si riduce ad eseguire al più successivamente tante addizioni parziali quanto è il numero degli ordini di unità del numero maggiore, ciascuna al più di tanti numeri semplici quanti sono i numeri da sommarsi*.

49. Dopo un tale ragionamento, per agevolare la pratica, si può avere questa regola: *Si scrivano i numeri da sommarsi gli uni sotto degli altri in maniera, che le loro unità dello stesso ordine siano allogati in una colonna medesima; indi si tiri una linea sotto l'ultimo di questi numeri per distinguerlo dal risultamento. Fatto ciò, si sommino, incominciando dalla destra, tutti i numeri semplici che si trovano in una stessa colonna, il che deve sapersi fare, com' è facilissimo, a memoria; se la somma sia espressa da una cifra sola, si scriva questa cifra al piede della colonna che ha dato quella somma; se da più cifre, si ponga quella delle unità, come prima, e si ritengano le altre, per aggiungerle alla somma che si troverà nella colonna seguente; finalmente la somma dell' ultima colonna si scriva tutta intera come si ha.*

Il lettore può eseguire per suo esercizio con questa regola le addizioni infrascritte.

328			
506			
93			73 420 571
4 583	2 000 396		598 430 562
12 504	5 784	3 849 178	30 451
9	98 341	634 951	60 000
20	583 478	100 040	578 340 005
18 043	2 687 999	4 584 169	1 250 281 589

50. Osservazione. La regola che abbiamo data insegna che le addizioni parziali debbono incominciare dalla destra; in questo modo si ottiene la maggiore brevità ed eleganza, che sono le due cose principalissime da cercare nei calcoli. Per tanto non bisogna credere che queste addizioni parziali non potessero incominciarsi eziandio dalla sinistra; in tal caso si opererà come nell' esempio che segue.

35 829 837
87 499 734
112 218 581
11 111 1
123 329 591

Si sommerà 3 con 8 e si scriverà intero il risultamento 11; passando alla seconda colonna, incominciando sempre dalla sinistra, si ha $5+7=12$; si scriverà dunque 2 sotto di questa colonna ed 1 a piè della prima; la terza dà $8+4=12$; dunque si porrà 2 sotto di questa terza ed 1 sotto la precedente, e così di seguito. Dopo ciò si sommeranno, incominciando anche dalla sinistra, i due numeri ottenuti, e si avrà il totale cercato. In questo esempio i numeri da sommarsi sono stati due, e siccome ciascuna loro cifra non poteva essere maggiore di 9, ch'è il maggior numero semplice, così la più alta somma che si poteva avere in ciascuna colonna era $9+9=18$; onde si vede che nel secondo dei due numeri che si ottengono col procedimento indicato, non vi può essere altra cifra che 1, potendo anche questa, come si vede nell' esempio addotto, mancare in alcuni posti. Nel fare la seconda addizione dalla sinistra è chiaro che se nel primo di questi due numeri non si troverà mai la cifra 9, si avrà per somma di ogni colonna un numero semplice, e così trovandosi il totale cercato, l' operazione terminerà. Ma quando s' incontrasse il 9, allora si avrebbe per somma $9+1=10$ che non è un numero semplice, e dovendosi, come prima, scrivere 1 a piè della colonna precedente, si avrà bisogno di una terza addizione, come si vede in quest' altro esempio.

$$\begin{array}{r}
3\ 857\ 823 \\
8\ 172\ 478 \\
\hline
11\ 929\ 291 \\
1\ \ 1\ \ \ \ 1 \\
\hline
11\ 020\ 201 \\
1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ \ \ \ \ \\
\hline
12\ 030\ 301
\end{array}$$

Qualora i numeri da sommarsi siano più di due, siccome il secondo dei due numeri che si ottengono col metodo esposto può avere le sue cifre qualunque, così essi si sommeranno come si è fatto vedere per il caso di due numeri.

Questa maniera di eseguire l'addizione non é punto in uso, e noi non ne abbiam fatto parola, se non per far vedere la ragione del doversi incominciare da destra le addizioni parziali.

Sottrazione.

51. *Se da un numero semplice si debba sottrarre un altro numero semplice minore, si toglieranno successivamente dal primo tutte le unità del secondo.* Ciò segue immediatamente dalla definizione della sottrazione. Infatti, secondo questa definizione, sottrarre, per esempio, 5 da 8 significa trovare un altro numero che aggiunto a 5 dia 8, ch'è quanto dire scomporre 8 in due parti delle quali una sia 5. Ora 8 ch'è la somma di 5 e del numero incognito, contiene tutte le unità di 5 più tutte le unità di esso numero incognito; dunque togliendo successivamente da 8 tutte le unità di 5, si avrà il numero cercato; il che è quello appunto che si voleva dimostrare. Adunque per sottrarre 5 da 8, avremo successivamente $8-1=7$, $7-1=6$, $6-1=5$, $5-1=4$, $4-1=3$; quindi $8-5=3$.

52. La sottrazione si fa sempre fra due numeri, perchè se abbiansi, per esempio, a togliere da 9 i numeri 2 e 3, è chiaro che si dovrà prima sottrarre 2 da 9, e si avrà $9-2=7$, e poi 3 dal residuo 7, il che dà $7-3=4$; dunque $9-2-3=4$; e qui l'operazione è caduta sempre tra due numeri e si è ridotta a due sottrazioni parziali. Si potrebbero anche sommare i due numeri 2 e 3, e poi togliere la somma 5 da 9; così $9-2-3=9-5=4$.

53. Siccome è facilissimo di ritenere a memoria la somma di due numeri semplici, o di un numero semplice con un numero composto, così facilissimo sarà pure di avere a mente la differenza tra due numeri semplici, o tra un numero semplice e un numero composto.

54. Dopo ciò sarà facile di sottrarre un numero composto da un numero composto. Sia, per esempio, 58795 il sottraendo e 35254 il sottrattore. Si supponga trovato il residuo, e si dispongano i tre numeri come qui sotto.

58 795	sottraendo
35 254	sottrattore
23 541	residuo

È chiaro dalla definizione della sottrazione che sommando il residuo col sottrattore si dee avere il sottraendo; dunque eseguendo l'addizione, si ha $4 + 1 = 5$, ch' è la cifra delle unità del sottraendo; poi $5 + 4 = 9$ ch' è la cifra delle decine del sottraendo, e così di seguito; dunque per ottenere il residuo, messo il sottrattore sotto del sottraendo in modo che le unità dello stesso ordine si trovino in una colonna medesima, si toglierà ciascuna cifra del sottrattore dalla cifra corrispondente del sottraendo, e si otterranno così le cifre del residuo. Si dirà dunque nell'esempio addotto: da 5 tolto 4 resta 1; da 9 tolto 5 resta 4; da 7 tolto 2 resta 5; da 8 tolto 5 resta 3; da 5 tolto 3 resta 2.

In questo procedimento è però mestieri di un'avvertenza, quando alcune cifre del sottraendo sieno minori delle cifre corrispondenti del sottrattore, come avviene nell'esempio che segue.

$$\begin{array}{r} 3\ 352\ 743 \\ 598\ 678 \\ \hline 2\ 754\ 065 \end{array}$$

Incominciando l' operazione come nell' esempio precedente, si vede che da 3 non si può togliere 8; allora si prenderà mentalmente dalla cifra seguente 4 una decina, che val 10 unità, ed aggiuntala a 3, si avranno 13 unità, dalle quali si potranno togliere 8 unità, e si avrà per resto 5. Ed in vero per operare analogamente all'esempio precedente, si dee togliere 8 dalla somma delle unità del residuo e del sottrattore; ora è chiaro che 8 più un altro numero semplice non può mai dare 3; adunque trovando scritta questa cifra alle unità del sottraendo, se ne argomenta che la somma era 13, e che nel far l'addizione la decina di questo numero si è ritenuta per aggiungerla alla somma che si troverebbe nella colonna delle decine. Passando alla seconda colonna, si vede parimente che la somma delle 7 decine del sottrattore più le decine del residuo incognito è 13, perchè la cifra 4 delle decine del sottraendo è rimasta 3 per averne prima tolta la decina che apparteneva alla somma della colonna delle unità. Da ciò si vede che *quando in una colonna qualunque la cifra superiore sia minore della inferiore, si dee aggiungere mentalmente alla prima una*

unità dell' ordine superiore seguente, e però considerar poscia diminuita di 1 la cifra della colonna che segue. Così dunque continuando l' operazione nell' esempio di sopra, si dirà: da 6 tolto 6 resta 0; da 12 tolto 5 resta 7; finalmente non avendo che togliere da 2, si scriverà questa cifra tal quale al residuo.

Eseguiamo collo stesso metodo la sottrazione su quest' altro esempio.

$$\begin{array}{r} 320\ 005 \\ 158\ 347 \\ \hline 181\ 858 \end{array}$$

Si ha da prima 15 — 7 = 8. Indi trovando 0 alle decine del sottraendo, se ne deduce che la somma delle decine del sottrattore e del residuo è 9; perchè aggiuntavi la decina che si è ritenuta nell' addizione dalla somma della colonna delle unità, si ha 10, e però scritto 0, come si vede, si è ritenuto 1 centinaio per aggiungerlo alla somma della colonna delle centinaia. Dunque per avere la cifra delle decine del residuo, si dirà: da 9 tolto 4 resta 5. Con un ragionamento affatto simile si vedrà che per avere la cifra delle centinaia si dovrà dire: da 9 tolto 8 resta 1; da 11 tolto 5 resta 6; da 2 tolto 1 resta 1. Rimane dunque stabilito che *qualora sia uno zero tra le cifre del sottraendo, e nella colonna precedente siasi trovata la cifra superiore minore della inferiore; si considererà questo zero come 9, avvertendo poi di diminuire di una unità la cifra della colonna che segue. Se poi vi siano vari zeri consecutivi si considereranno tutti questi come altrettanti 9, badando parimente di diminuire di una unità la cifra significativa della colonna che vien dopo di questi zeri.*

55. Dalle cose dette fin qui si potrà avere la regola seguente per eseguire la sottrazione fra due numeri composti. *Si ponga il numero minore sotto del maggiore in maniera, che le unità dello stesso ordine si trovino in una colonna medesima; indi, tirata una linea per separare questi due numeri dal residuo, si tolga successivamente in ciascuna colonna, cominciando dalla dastra, la cifra inferiore dalla superiore, dove ciò sia possibile; dove non sia, si aumenti di 10 unità la cifra superiore, e passando poi alla colonna seguente,*

si consideri diminuita di 1 la cifra del sottraendo; quando vi fossero tra le cifre del sottraendo alcuni zeri intermedi, si considerino come altrettanti 9.

56. Qualora la cifra superiore si debba diminuire di una unità, per essersi questa restituita alla cifra precedente, si può anche, per maggiore facilità, lasciarla quale è, aumentando però la inferiore di una unità; perocchè così aumentando tanto il sottraendo, quanto il sottrattore di 1, il residuo non cangia. Vaglia l'esempio infrascritto.

$$\begin{array}{r} 4\,265 \\ \underline{1\,879} \\ 2\,386 \end{array}$$

Si dirà: da 15 tolto 9 resta 6; indi in luogo di diminuire 6 di una unità e dire, come prima, da 15 tolto 7, si lascerà stare tal quale il 6 e si aumenterà il sottrattore di una unità; sicchè dirassi: da 16 tolto 8 resta 8; e così appresso, da 12 tolto 9 resta 3; da 4 tolto 2 resta 2.

57. *Si chiama complemento aritmetico di un numero la differenza di questo numero dal numero decimale prossimamente maggiore.* Così per avere il complemento aritmetico del numero 238, si osserverà che il numero decimale prossimamente maggiore di 238 è 1000; dunque 1000 — 238, cioè 762 è il complemento aritmetico di 238. Ora da questo esempio si vede che il sottraendo è sempre l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del sottrattore, cioè del numero di cui si cerca il complemento; dunque dalla regola testè data della sottrazione si deduce, che generalmente *per avere il complemento aritmetico di un numero si dee sottrarre la cifra delle unità da 10 e ciascuna delle altre cifre da 9;* o che vale lo stesso, *le cifre del complemento aritmetico di un numero sono, per quella della unità ciò che bisogna aggiungere alla cifra delle unità del numero dato per ottener 10, per tutte le altre, quelle che fa d'uopo aggiungere a tutte le altre cifre del numero per aver 9.* Si voglia, per un altro esempio, il complemento aritmetico di 89345674; ve lo si scriverà subito sotto, come si vede qui appresso.

$$\begin{array}{r} 89\,345\,674 \\ 10\,654\,326 \end{array}$$

Si dirà, incominciando dalla sinistra: da 8 a 9 è 1, che si scriverà sotto la prima cifra 8; da 9 a 9 è 0; da 3 a 9 è 6; da 4 a 9 è 5; da 5 a 9 è 4; da 6 a 9 è 3; da 7 a 9 è 2; da 4 a 10 è 6. Si osservi che come cercando il complemento di 89 345 674 si è avuto 10 654 326, così, viceversa, se si volesse il complemento di 10 654 326, si avrebbe 89 345 674; onde questi due numeri sono complementi l' uno dell' altro; ed è chiaro che la loro somma dà 100000000. Dunque in generale *allorchè la somma di due numeri sia un numero decimale, ciascuno di quei due numeri è il complemento aritmetico dell' altro.*

58. Ci sarà di grande utilità in appresso di poter cangiare una sottrazione in una addizione; or questo si può fare appunto per mezzo del complemento aritmetico; ed ecco in qual modo. Sia da eseguirsi la sottrazione 7 — 4; in cambio di togliere 4 da 7, si aggiunga a 7 il complemento di 4, ch' è 10 — 4; si avrà, indicando le operazioni, 7 + 10 — 4; ora evidentemente questo numero supera 7 — 4 di 10, cioè di una unità dell'ordine immediatamente superiore alla unità di 4; dunque in luogo di togliere 4 da 7, si otterrà il medesimo risultamento, aggiungendo a 7 il complemento aritmetico di 4 ch' è 6, e togliendo ad occhio dalla somma 13 la cifra 1 delle decine; in questo modo si ottiene 3, che sarebbesi anche avuto dal togliere direttamente 4 da 7. Adunque in generale *in cambio di sottrarre un numero da un altro, si può aggiungere al sottraendo il complemento aritmetico del sottrattore, e togliere poi dalla somma una unità dell' ordine immediatamente superiore del più alto ordine di unità del sottrattore.* Così, se si voglia trovare la differenza 3483 — 875, si prenderà nel modo indicato innanzi il complemento di 875 ch' è 125; indi fatta l' addizione 3483 + 124 = 3607, si toglierà dalla somma 3607 un migliaio, il che per la estrema sua facilità non può dirsi un' operazione, e si avrà per la differenza cercata 2607.

59. Osservazione. Si è veduto che nella sottrazione si opera procedendo da destra a sinistra; ma potrebbesi anche fare al contrario? Allorquando ciascuna cifra del sottraendo sia maggiore della cifra corrispondente del sottrattore, si comprende chiaro che sarebbe lo stesso incominciare dalla destra o dalla sinistra, perocchè niuno dei due modi di procedere ha sull' altro la prefe-

renza di una facilità e brevità maggiore. Ma qualora alcune cifre del sottraendo sieno minori delle corrispondenti del sottrattore, ch'è il caso più frequente, sarebbe allora più difficile e meno elegante non che spedito, il procedere da sinistra a destra. Infatti per confrontare questi due modi, conoscendo già il primo, vediamo come si potrebbe operare nel secondo. Prendiamo l'esempio seguente.

$$\begin{array}{r} 8\,356 \\ 5\,793 \\ \hline 2\,563 \end{array}$$

Incominciando dalla prima colonna a sinistra, prima di sottrarre 5 da 8, si guarderà nella seconda colonna se la cifra superiore sia maggiore o minore della inferiore; qui si vede che 3 è minore di 7, dunque si diminuirà 8 di 1, e si dirà: da 7 tolto 5 resta 2. Passando alla seconda colonna, si aggiunge alla cifra superiore 3 il migliaio tolto innanzi ad 8, e prima di togliere 7 da 13, si guarderà, come prima, alla seconda colonna, ove si vede che 5 è minore di 9; dunque si dirà: da 12 tolto 7 resta 5. Parimente, nel passare alla terza colonna, prima di sottrarre 9 da 15, si vedrà che nella quarta 6 è maggiore di 3; e però si dirà: da 15 tolto 9 resta 6. In ultimo da 6 tolto 3 resta 3.

Moltiplicazione.

60. Nella moltiplicazione dei numeri interi si hanno a considerare tre casi: 1° quando il moltiplicando e il moltiplicatore siano due numeri semplici; 2° quando l'uno sia composto e l'altro semplice; 3° quando siano entrambi composti.

1° Caso. *Il prodotto di due numeri semplici si ottiene con fare la somma di tanti numeri uguali al moltiplicando quante unità contiene il moltiplicatore.* Questa proposizione discende immediatamente dalla definizione della moltiplicazione. Sia, per esempio, da moltiplicarsi 5 per 3; secondo questa definizione, il prodotto deve essere formato con 5, come 3 è formato coll'unità; ora $3 = 1 + 1 + 1$; dunque $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = 15$. E siccome si è ve-

duto innanzi che la somma di più numeri semplici si può ritenere facilissimamente a memoria, e però non abbisogna di operazione, così pure il prodotto di due numeri semplici, che si riduce, come abbiamo veduto, alla somma di più numeri semplici, si terrà agevolissimamente a memoria, e non sarà mestieri di operazione per trovarlo.

61. Tutti i prodotti di due numeri semplici si trovano scritti nel quadro seguente dovuto a Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Nella prima linea orizzontale sono scritti successivamente i nove numeri semplici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nella seconda i loro doppi 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Sommando poi ciascun numero della prima col corrispondente della seconda, cioè col suo doppio, si ottiene la terza linea orizzontale; dove saranno perciò i numeri 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 rispettivamente tripli di quelli della prima. Parimente sommando ciascun numero della

prima col corrispondente della terza, si avranno nella quarta i numeri 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 rispettivamente quadrupli di quelli della prima. Continuando in questa guisa nelle rimanenti linee orizzontali si troveranno scritti successivamente i quintupli, i sestupli, gli ottupli, i nonupli rispettivi dei numeri della prima.

Segue dalla formazione qui esposta di questa tavola, che se si considerano le linee orizzontali, ciascuna di esse contiene i prodotti di ciascnno dei numeri semplici scritti nella prima per il numero ch' esprime il ranco di essa linea; il qual numero, essendo nove le linee, è sempre semplice e si trova, come vedesi, per cifra iniziale della linea orizzontale che si considera. E così è chiaro che in questa tavola sono contenuti tutti i prodotti di due numeri semplici, siccome appunto avevamo detto.

Anche, potrebbesi considerare questa tavola per linee verticali, o sia per colonne; dico che si avrà così il medesimo di prima. Infatti la prima colonna a sinistra contiene i numeri semplici, come la prima linea orizzontale, e le altre i prodotti rispettivi di questi numeri semplici per le loro cifre iniziali, che sono anche numeri semplici.

62. Ora se per mezzo di questa tavola si voglia trovare il prodotto di due numeri semplici, per esempio di 7 per 5, è chiaro che bisognerà fare in questo modo. Si cercherà nella prima linea orizzontale il numero 7; indi si discenderà nella colonna che ha questo 7 per cifra iniziale, fino alla linea orizzontale la cui iniziale è 5; il numero 35 al quale si perverrà sarà il prodotto di 7 per 5. Se invece di considerare 7 come moltiplicando e 5 come moltiplicatore, si facesse il contrario, bisognerebbe cercare similmente 5 nella prima linea orizzontale, e poi discendere nella colonna fino alla linea cheha per iniziale 7; ora in questo caso si trova ugualmente 35. Ciò nasce dacchè è indifferente, come si è veduto innanzi, di considerare la tavola per linee orizzontali, o verticali; infatti tornando a prendere 7 come moltiplicando, ma considerando la tavola per colonne, si dovrà cercare 7 nella prima colonna a sinistra, e poi procedere nella linea orizzontale di cui questo 7 è la cifra iniziale, fino alla colonna che ha per iniziale 5; e siccome la tavola considerata nei due modi dà sempre lo stesso,

così si dovrà trovare ancora 35; ora quest'ultima maniera di prendere i due numeri è la stessa che quella usata precedentemente, cioè di prendere 5 nella prima linea orizzontale e 7 nella prima colonna a sinistra.

Da ciò si vede che $7 \times 5 = 5 \times 7$, ovvero che nel moltiplicare due numeri si può cangiare il moltiplicando in moltiplicatore e il moltiplicatore in moltiplicando, senza che per questo il prodotto venga in nulla alterato. Veramente il fatto che si osserva nella tavola pitagorica non può tenersi rigorosamente come una dimostrazione; e però noi ritorneremo di proposito su di ciò più innanzi, e quivi faremo uso di un ragionamento che non lascerà più nulla a desiderare.

Per ora ammettendo ciò come vero, nel moltiplicare due numeri, essendo a nostro arbitrio di scegliere per moltiplicando l'uno piuttosto che l'altro, noi converremo di prendere per moltiplicando il maggiore.

63. 2° Caso. La moltiplicazione di un numero composto per un numero semplice si riduce a varie moltiplicazioni fra due numeri semplici. Abbiasi, per esempio, ad eseguire la moltiplicazione 3783×4. Per la convenzione or ora fatta, prenderemo per moltiplicando il numero maggiore 3783. Per la definizione della moltiplicazione si avrà $3783 \times 4 = 3783 + 3783 + 3783 + 3783$; ora eseguiamo qui sotto l' addizione indicata.

$$\begin{array}{r} 3\ 783 \\ 3\ 783 \\ 3\ 783 \\ 3\ 783 \\ \hline 15\ 132 \end{array}$$

È chiaro che la somma della colonna delle unità è il prodotto della cifra 3 delle unità del moltiplicando per 4, parimente la somma della colonna delle decine è il prodotto della cifra 8 delle decine del moltiplicando per 4; la somma delle centinaia è il prodotto della cifra 7 delle centinaia del moltiplicando per 4; e continuando così, è palese che invece dell'addizione fatta, per maggiore brevità e minor perdita di luogo, si

potrà eseguire l' operazione nel modo indicato dalla regola seguente. *Per moltiplicare un numero composto per un numero semplice, si ponga quest'ultimo sotto la cifra delle unità del primo; indi, tirata una linea, per separare i due fattori dal prodotto, si moltiplichi, incominciando dalla destra, ciascuna cifra del moltiplicando per il moltiplicatore, il che sa farsi a memoria; se il prodotto sia espresso da una sola cifra, si scriva questa cifra sotto la colonna della cifra del moltiplicando che l' ha data; se da due cifre, si scriva, come prima, quella delle unità e si ritenga quella delle decine per aggiungerla al prodotto del moltiplicatore per la cifra seguente del moltiplicando, salvo nell' ultimo prodotto che si scrive tutto intero.*

Così nell' esempio preso di sopra si disporranno i due numeri nel modo che segue

$$\begin{array}{r} 3\ 783 \\ 4 \\ \hline 15\ 132 \end{array}$$

e si dirà: 4 per 3 fa 12; si scriverà 2 e si riterrà 1; 8 per 4 fa 32 e 1 di ritenuta 33; e scritto il primo 3 nel posto delle decine del prodotto si riterrà l' altro; 7 per 4 fa 28, e 3 di ritenuta 31; si scriverà 1 al posto delle centinaia del prodotto e si riterrà 3; 3 per 4 fa 12 e 3 di ritenuta 15, che si scriverà tutto intero nel prodotto.

Eseguiamo col medesimo procedimento quest' altra moltiplicazione

$$\begin{array}{r} 420\ 007 \\ 9 \\ \hline 3\ 780\ 063 \end{array}$$

Si dirà: 7 per 9 fa 63; e scritto il 3 si riterrà il 6; in seguito trovandosi 0 nelle decine del moltiplicando, qual significato dovremo mai dare a 9 moltiplicato per 0? E chiaro che se si scrivesse il moltiplicando otto altre volte sotto di sè, e si eseguisse l' addizione, come prima, non vi sarebbero eziandio decine nella

somma, e però si dovrebbe porre 0 al loro posto; ciò s'esprime con dire che la sómma di quanti zeri si vogliano, o ch'è lo stesso, il prodotto di zero per un numero qualunque è uguale a zero; espressioni che in verità non corrispondono all'idea che dee risvegliarci la parola somma, o la parola prodotto, ma che si usano, dopo determinatone il valore, a cagione dell'uniformità dell'operazione. Continuando dunque la moltiplicazione, diremo: 9 moltiplicato per 0 fa 0; dunque si scriverà al posto delle decine del prodotto la sola cifra 6 delle decine ritenute nel prodotto antecedente; ancora, si ha dopo $9 \times 0 = 0$; dunque si scriverà 0 al posto delle centinaia del prodotto; e così è manifesto come dovrà procedere l'operazione.

64. Osservazione. È chiaro che se la moltiplicazione di un numero composto per un numero semplice si volesse eseguire, incominciando le moltiplicazioni parziali dalla sinistra, bisognerebbe tenere un modo analogo a quello che si è indicato per l'addizione nel n.º 50. Allora sarà manifesta la maggiore brevità ed eleganza che si ottiene incominciando dalla destra.

65. La moltiplicazione cade sempre fra due numeri, perchè, come sarà dimostrato in appresso, per moltiplicare un numero per il prodotto di più altri si può prima fare il prodotto del moltiplicando per un fattore del moltiplicatore, poi moltiplicare questo prodotto per un altro fattore, e poi ancora questo nuovo prodotto per un altro fattore, e così di seguito per quanti sono i fattori del moltiplicatore. Per ora ammettendo ciò, se si voglia, per esempio, eseguire la moltiplicazione $3 \times 5 \times 7 \times 9$, si farà successivamente $3 \times 5 = 15$, $15 \times 7 = 105$, $105 \times 9 = 945$; dunque $3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$; nel quale esempio, le moltiplicazioni parziali sono sempre cadute, come avevamo detto, fra due numeri.

66. 3º Caso. In ultimo la moltiplicazione di due numeri composti si riduce a varie moltiplicazioni di un numero composto per un numero semplice. Sia da moltiplicarsi 34276 per 238; si prenderà sempre, secondo la convenzione fatta a principio, il maggiore dei due numeri per moltiplicando. Ora è chiaro che ripetere 238 volte il numero 34276 è lo stesso che ripeterlo prima 8 volte, poi 30 volte e poi 200 volte, e poi sommare questi tre pro-

dotti parziali; perchè infatti $258 = 200 + 50 + 8$. Così dunque avremo

$$34276 \times 258 = 34276 \times 200 + 34276 \times 50 + 34276 \times 8.$$

L'ultima delle moltiplicazioni indicate cioè 34276×8 si sa eseguire per il caso antecedente, come quella di un numero composto per un numero semplice, e si ha per prodotto 274208; in quanto alle altre due si osserverà che moltiplicare un numero per 50 è lo stesso che moltiplicarlo prima per 5, e poi il prodotto per 10, perocchè 50 è il prodotto di 5 per 10; ciò risulta dal principio ammesso nel n.° 65 che moltiplicare un numero per il prodotto di più altri torna lo stesso che moltiplicarlo successivamente per tutti i fattori del moltiplicatore; dunque si avrà $34276 \times 50 = 34276 \times 5 \times 10$. Ora la moltiplicazione di 34276 per 5, come quella che cade tra un numero composto ed un numero semplice, si sa eseguire per il caso precedente, ed ottiensi 102828; la seconda moltiplicazione di questo prodotto 102828 per 10 è così facile che non abbisogna di dimostrazione, perchè basta scrivere uno zero a destra di questo numero come si è già veduto nel sistema di numerazione (26); dunque $102828 \times 10 =$ $= 1028280$. Dunque la seconda delle tre moltiplicazioni indicate ci dà per prodotto 1028280. Passando alla terza avremo per ragioni simili a quelle dette nella seconda, $34276 \times 200 = 34276$ $\times 2 \times 100$; e fatte le due moltiplicazioni successive, come prima, per 2 e per 100, si trova il prodotto 6855200. Adunque sostituendo i tre prodotti ottenuti alle indicazioni loro nell' uguaglianza esposta di sopra, si ha

$$34276 \times 258 = 6855200 + 1028280 + 274208.$$

Questa dimostrazione, al pari di tutte le antecedenti, dee tenersi per generale, comechè fatta sopra un particolare esempio, perchè si comprende chiaramente ch'ella sarebbe in tutto la stessa per un altro esempio qualunque.

67. A fine di agevolare la pratica, si stabilisce la seguente regola cavata dal ragionamento or ora fatto. *Per eseguire la molti-*

plicazione fra due numeri composti, preso sempre il maggiore per moltiplicando, si ponga il moltiplicatore sotto del moltiplicando in modo, che le unità dello stesso ordine si trovino in una colonna medesima; indi, tirata una linea per separare i due fattori dal prodotto, si formino i prodotti del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e si scrivano l'uno sotto dell'altro questi prodotti parziali, avvertendo di scrivere la prima cifra di ciascuno di essi sotto le unità dell'ordine di quella cifra del moltiplicatore che ha dato questo prodotto; in ultimo si sommino tutti i prodotti parziali e si avrà il prodotto totale.

Riprendendo dunque l'esempio di sopra, opereremo, secondo questa regola, nel modo che segue.

34 276	moltiplicando.
238	moltiplicatore.
274 208	1° prodotto parz.
1 028 28	2° prodotto parz.
6 855 2	3° prodotto parz.
8.157 688	prodotto totale.

Eseguiremo primamente la moltiplicazione del moltiplicando per la cifra 8 delle unità del moltiplicatore, il che sappiamo fare per quello che si è veduto nel caso antecedente; questo primo prodotto parziale sarà scritto in primo luogo sotto la linea. Indi formeremo nello stesso modo il prodotto del moltiplicando per la cifra 3 delle decine del moltiplicatore; e siccome a questo prodotto, per quello che si è veduto innanzi, bisognerebbe porre a destra uno zero per moltiplicarlo per 10, così la sua prima cifra 8 sarà al posto delle decine; onde senza scrivere questo zero, di cui non si fa niun conto nell'addizione, si porrà il secondo prodotto parziale sotto del primo in modo, che la prima cifra 8 si trovi nella colonna delle decine. Parimente effettuando il prodotto del moltiplicando per la cifra 2 delle centinaia del moltiplicatore, si scriverà questo terzo prodotto sotto del secondo in modo, che la prima cifra 2 si trovi nella colonna delle centinaia. In ultimo sommando i tre prodotti parziali, si otterrà il prodotto cercato.

68. Ora non bisogna credere che siavi alcun vantaggio nel prendere le cifre del moltiplicatore da destra verso sinistra, piuttosto che da sinistra verso destra, per formare i vari prodotti parziali; è indifferente di usare la prima o la seconda maniera. Si riprenda l'esempio di sopra, e si formi prima il prodotto del moltiplicando per la cifra 2 delle centinaia del moltiplicatore, e poi per la cifra 3 delle decine, e per quella delle unità 8. Per avere la stessa somma di prima, essendo i tre prodotti parziali precisamente gli stessi, è chiaro che si dovrà avere l'avvertenza di disporre l'un sotto l'altro questi prodotti nel modo che si vede qui appresso

```
 34 276
    238
6 855 2
1 028 28
  274 208
8 157 688
```

Ci si presenterà in appresso l'occasione di servirci a preferenza di questa seconda maniera di procedere.

69. Qualora si trovino alcuni zeri fra le cifre significative del moltiplicatore, si comprende che non avendo da essi alcun prodotto, bisogna non tenerne conto e passare alle cifre significative che seguono, badando però bene di scrivere nella colonna conveniente la prima cifra del prodotto che si ottiene. Ciò si fa manifesto dalla moltiplicazione eseguita qui appresso.

```
     7 326
     4 003
    21 978
29 304
29 325 978
```

70. Se uno dei fattori sia terminato da alcuni zeri, si considereranno le sole cifre significative, e al prodotto che si ha si scriveranno a destra tutti questi zeri. Così se si voglia moltiplicare

34000 per 17, si farà prima il prodotto 34 × 17 = 578; indi restituendo a questo prodotto i tre zeri del moltiplicando, si avrà 34000 × 17 = 578000. La dimostrazione è chiarissima. Se invece della moltiplicazione si volesse far uso dell'addizione, si dovrebbe scrivere 17 volte il numero 34000, e si vede che le tre prime colonne darebbero alla somma tre zeri; la continuazione poi dell'addizione si ridurrebbe al prodotto di 34 per 17. Dal che rimane dimostrato quello che abbiam detto. Se gli zeri stessero al moltiplicatore si cangerebbe questo in moltiplicando; il che, come si è detto nel n.° 62, non altera il prodotto; e la dimostrazione sarebbe la stessa.

71. Allorchè poi tanto il moltiplicando quanto il moltiplicatore siano terminati da zeri, si farà il prodotto delle cifre significative, e gli si porranno a destra tanti zeri quanti ne sono in entrambi i fattori. Per esempio, il prodotto 34000 × 200 si otterrà facendo il prodotto di 34 per 2, ch'è 68, e poi ponendo cinque zeri a destra di 68, sicchè 34000 × 200 = 6800000. Infatti considerando da prima solamente gli zeri del fattore 34000, per formare il prodotto cercato, si dovrà, secondo il n.° antecedente, moltiplicare 34 per 200 ed aggiungere al prodotto due zeri; ma in simil modo per moltiplicare 34 per 200, si dovrà fare il prodotto di 34 per 2 ed aggiungergli due zeri; dunque per formare il prodotto 34000 × 200, si dovrà, come avevamo detto, formare quello di 34 × 3 e poi scrivergli a destra cinque zeri.

Ora si è veduto nel n.° 65 che per moltiplicare fra loro quanti numeri si voglia, le moltiplicazioni si eseguono successivamente a due a due; dunque deducesi da quello che si è ora dimostrato che se *in un prodotto qualunque vari fattori siano terminati da zeri, questo prodotto si ottiene moltiplicando le cifre significative e ponendo a destra del risultamento tanti zeri quanti ve ne sono in tutti quei fattori insieme.*

72. *Il numero delle cifre di un prodotto non può essere maggiore del numero delle cifre di tutti i suoi fattori insieme, ma può essere maggiore di questo numero meno il numero dei fattori.* Così il prodotto 347 × 25 × 9 potrà avere o sei, o cinque, o quattro cifre, nè più, nè meno. Infatti, si considerino prima due fattori; per esempio, 4783 e 327. Essendo 327 < 1000 e 327 > 100, si avrà

$4783 \times 327 < 4783000$ e $4783 \times 327 > 478300$; di qui si vede che il numero delle cifre del prodotto non può essere più di sette, nè meno di sei; ora sette è il numero delle cifre dei due fattori insieme, e sei è questo numero meno quello dei fattori più uno; dunque quando i fattori siano due la proposizione enunciata è vera. Siano ora tre i fattori, e si ragioni sull'esempio preso poco innanzi $347 \times 25 \times 9$. Si è veduto già (65) che per ottenere questo prodotto si dee formare prima quello di 347 per 25, e poi moltiplicarlo per 9. Ora il primo prodotto componendosi di due fattori, per quello che si è or ora dimostrato, il numero delle cifre non può essere che 5 o 4; se ha cinque cifre moltiplicato per l'altro fattore 9 ch'è di una sola cifra darà o sei o cinque cifre; se è di quattro cifre avrà o cinque, o quattro cifre; dunque il prodotto finale $347 \times 25 \times 9$ potrà avere o sei, o cinque, o quattro cifre; onde si vede che la proposizione enunciata è vera anche per il caso di tre fattori. Ora è chiaro che come si è passato dal caso di due fattori a quello di tre, si passerebbe medesimamente da quello di quattro a quello di cinque, e così continuando. Laonde la proposizione rimane dimostrata per quale che siasi numero di fattori.

73. Osservazione. Si noti che nel moltiplicare due numeri composti, la ritenuta che si ha da un prodotto parziale di una cifra dell'uno per una cifra dell'altro è sempre una cifra minore di ciascuna di quelle due; la ragione è chiara. Sia, per esempio, 7 una delle due cifre; se si moltiplica 7 per 10 si ha 70, e in questo caso la ritenuta è 7, cioè la cifra di cui si tratta; ma l'altra cifra dovendo essere evidentemente minore di 10, moltiplicata per 7 dà un prodotto minore di 70; dunque la ritenuta che si ha dal prodotto delle due cifre è minore di 7. Ora per dimostrare che lo stesso avviene per rispetto all'altra cifra, si passerà 7 a moltiplicatore e si prenderà quest'altra cifra per moltiplicando, ed un ragionamento affatto simile ci farà vedere ch'essendo $7 < 10$, la ritenuta è minore dell'altra cifra.

Tutto ciò che si è detto sino qui sulla moltiplicazione è necessario e bastevole a sapersi; chi brami conoscerne più in là legga le osservazioni nella nota D.

Divisione.

74. Nella divisione di un numero intero per un altro ci si presentano da prima tre casi: 1° quando il dividendo e il divisore siano fra loro uguali; ed allora non vi è bisogno di operazione, sapendosi che il quoziente è l'unità (45); 2° quando il dividendo è minore del divisore; e in questo caso nemmeno vi è bisogno di operazione perchè si sa per il n.° 41 che il quoziente è una frazione vera che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore; 3.° quando il dividendo sia maggiore del divisore; ed allora si hanno a considerare quattro casi, che noi verremo successivamente trattando qui appresso.

75. 1° Caso. Quando il dividendo è minore di 100 e il divisore è un numero semplice. In questo caso il quoziente si ottiene mentalmente e senza bisogno di operazione. Infatti, essendo allora due al più le cifre del dividendo, si deduce da ciò che si è detto nel n.° 72 che il divisore e il quoziente debbono essere due numeri semplici; perocchè dalla definizione della divisione risulta che il dividendo è il prodotto del divisore per il quoziente; ora, secondo il numero citato, quando il prodotto ha una o due cifre ciascuno dei due fattori dee averne una. Ma si è veduto già che il prodotto di due numeri semplici dee sapersi a mente, dunque quando sarà dato alcun prodotto tale e uno dei suoi fattori, si dovrà trovare mentalmente l' altro fattore. Così se si voglia dividere 8 per 2, si saprà subito che il quoziente è 4, perchè si sa che $2 \times 4 = 8$; parimente si saprà a memoria che $35 : 7 = 5$, che $54 : 6 = 9$, e simili.

Siccome la tavola pitagorica è utile per l' esercizio di trovare i prodotti di due numeri semplici, e quindi menarli a memoria, così utile sarà pure a trovare uno dei fattori di un prodotto di due numeri semplici, qualora sia dato questo prodotto e l' altro fattore; e giungere per tal modo al punto di trovarlo a mente. Per esempio, volendo avere colla tavola pitagorica il quoziente di 8 diviso per 2, in una delle due linee orizzontali o verticali, per esempio, nell'orizzontale si prenderà il divisore 2 e poi si discenderà nella colonna di cui questo 2 è la cifra iniziale fino a che si

giunga al numero 8, ch'è il dividendo; allora è chiaro che la cifra iniziale 4 della linea orizzontale dove si trova 8, sarà il fattore cercato, ovvero il quoziente.

76. Ora è palese nella stessa tavola pitagorica che non tutti i numeri interi divisi per un numero intero dànno per quoziente un altro numero intero. Se, per esempio, si voglia dividere 37 per 5, percorrendo la colonna che ha per cifra iniziale 5, mai non si trova il numero 37 perchè da 35 si passa a 40, i quali due numeri sono l'uno minore l'altro maggiore di 37, e che divisi per 5, dànno per quoziente l'uno 7 e l'altro 8. Adunque il quoziente cercato di 37 diviso per 5 è un numero maggiore di 7 e minore di 8; ma 7 e 8 sono due numeri interi consecutivi, e quindi ogni altro numero intermedio fra loro, non può essere intero (5); dunque il quoziente cercato è una frazione spuria maggiore di 7 e minore di 8. Per trovare questo quoziente, si osserverà che $37=35+2$; ma, pel noto assioma, tanto è dividere per un numero il tutto, quanto è dividere ciascuna sua parte per quel numero e poi sommare i quozienti; dunque per dividere 37 per 5, avendo scomposto 37 nelle due parti 35 e 2, si farà prima $35:5=7$, ed indi $2:5=\frac{2}{5}$; così si ottiene $73:5=7+\frac{2}{5}$. È facile poi di vedere che $7+\frac{2}{5}$ è lo stesso che la frazione spuria $\frac{37}{5}$; la ragione si può dare in due modi; primamente, secondo il significato che abbiamo già dato innanzi (41) all'espressione $\frac{37}{5}$, questa è il quoziente di 37 diviso per 5, ch'è quello appunto che si cerca; secondamente se si voglia mettere 7 sotto forma di una frazione che abbia per denominatore 5, si moltiplicherà e dividerà simultaneamente 7 per 5, il che non altererà il suo valore, e si avrà $\frac{35}{5}$; ma il quoziente cercato è $7+\frac{2}{5}$; dunque sostituendo a 7 l'espressione equivalente trovata $\frac{35}{5}$, si avrà per questo quoziente $\frac{35}{5}+\frac{2}{5}$, la qual somma è manifesta-

mente $\frac{37}{5}$. In cambio di scrivere $7 + \frac{2}{5}$ si suole più comunemente sottintendere il segno + e scrivere $7 \frac{2}{5}$.

77. Quando un numero intero diviso per un altro numero intero dà per quoziente anche un numero intero, si dice che il primo *è divisibile esattamente* per il secondo; in questo caso il dividendo è un multiplo del divisore e lo contiene tante volte quante sono le unità del quoziente; così 35 è divisibile esattamente per 5, perchè $35 : 5 = 7$, e 35 è il settuplo di 5, cioè contiene 5 sette volte. Quando poi si dice che un numero *non è divisibile esattamente* per un altro, non si dovrà già intendere che il primo non si possa dividere in tante parti uguali quante unità contiene il secondo, perocchè ogni quantità, pel noto assioma, si può dividere in quante parti uguali si voglia; ma si dovrà intendere che il dividendo non contiene il divisore un certo numero di volte esattamente, cioè non ne è un multiplo, e però il quoziente non può essere un numero intero. Così il dire che 37 non è divisibile esattamente per 5, non significa che non si può avere la 5 parte di 37, perchè questa, come si è veduto, o $7 \frac{2}{5}$, ovvero $\frac{37}{5}$; ma significa che 37 non è un multiplo di 5, e perciò il quoziente non è un numero intero. Come si è operato per avere il quoziente di 37 diviso per 5, si opererà pure per trovare il quoziente di un altro numero intero qualunque diviso per un altro di cui non sia un multiplo, cioè *si scomporrà il dividendo in due parti delle quali la prima sia il maggior multiplo del divisore contenuto nel dividendo; poi si dividerà ciascuna di queste parti per il dividendo; il primo quoziente sarà un numero intero, il secondo una frazione vera; la somma di questi due quozienti parziali sarà il quoziente cercato.*

78. In siffatte divisioni si suol chiamar *resto* ciò che si ha togliendo dal dividendo il maggior multiplo del divisore; così nell'esempio preso di sopra $37 : 5 = (35 + 2) : 5$ il resto è 2, e si chiama così, perchè potendosi fare la divisione di 37 per 5 col togliere successivamente 5 da 37 quanto volte si può, se così si operasse, potrebbesi togliere 5 sette volte da 37 e nella settima sottrazione il *resto* sarebbe 2, dal quale non si può più togliere 5. Per esprimere ciò si dice che 5 entra in 37 sette volte col resto 2.

In tali casi si sogliono distinguere due quozienti; il *particolare* ed il *completo;* il particolare è il numero intero che indica il maggior numero di volte che il divisore è contenuto nel dividendo; il *completo* poi è quel numero ch' è contenuto esattamente tante volte nel dividendo quante sono le unità del divisore. Così nell' esempio 37 : 5 il quoziente particolare è 7, il completo $7\frac{2}{5}$.

Seguo dal fin qui detto che *il resto è sempre minore del divisore,* e che *il dividendo è uguale al divisore moltiplicato pel quoziente particolare più il resto.* Riprendendo l' esempio 37 : 5, in cui il quoziente particolare è 7 e il resto 2, si vede che $2 < 5$, e $5 \times 7 + 2 = 37$.

Alcune volte in queste tali divisioni si suol disprezzare il resto, cioè invece di prendere il quoziente completo si considera il solo particolare; è chiaro che allora l'errore che si fa è minoro di una unità, perchè infatti il quoziente particolare differisce dal completo per una frazione vera.

Queste divisioni sono anche facilissime, come è chiaro, ad eseguirsi mentalmente; ed è necessario che a ciò si arrivi con un poco di esercizio, a fine di eseguir poi speditamente e bene la divisione nei rimanenti casi, i quali, come si verrà vedendo, riduconsi sempre a varie divisioni di un numero minore di 100 per un numero semplice. Adunque se si voglia dividere, per esempio, 67 per 9, si dovrà subito sapere, senza bisogno di operazione, che si ha 7 col resto 4, e che quindi il quoziento completo è $7\frac{4}{9}$.

79. 2.° Caso. Quando il dividendo è maggiore di 100, cioè di più di duo cifre, e il divisore è un numero semplice. Due casi possono darsi: o il dividendo è un multiplo del divisore, o non; nel primo caso, per quello che si è veduto nel n.° antecedente, il quoziente sarà un numero intero, nel secondo si avrà il quoziente particolare intero con un resto, e per avere il quoziente completo si aggiungerà al particolare la frazione vera che ha per numeratore il resto e per denominatore il divisore.

Trattiamo da prima il caso in cui la divisione possa farsi esattamente. L'operazione si dispone come si vede qui sotto.

```
26 495 | 7
 5 4   |-----
   59  | 3 787
    55 |
     0 |
```

e si ragiona così. Se la divisione non si potesse fare esattamente, il resto che si otterrebbe, dovendo essere minore del divisore ch'è un numero semplice, dovrebbe anche essere un numero semplice; quindi moltiplicando il quoziente particolare per il divisore, ed al prodotto aggiungendo il resto per produrre il dividendo, questo dividendo avrà lo stesso numero di cifre del prodotto del divisore per il quoziente; cioè che nelle divisioni di cui è parola il resto non influisce in nulla sul numero delle cifre del dividendo. Dunque o che la divisione si possa fare esattamente o che non si possa, sempre dal numero delle cifre del dividendo si può argomentare il numero delle cifre del quoziente intero nel primo caso, e del quoziente intero particolare nel secondo. Ora nel nostro esempio, avendo il dividendo cinque cifre e il divisore una, si deduce per quello che si è detto nel n.º 72 circa il numero delle cifre di un prodotto, che il quoziente dovrà avere quattro cifre; dunque il più alto ordine di unità ch'esso abbia sono le migliaia. Per trovare la cifra delle migliaia del quoziente, si osserverà ch'essendo il dividendo il prodotto del divisore pel quoziente, le migliaia del dividendo sono il prodotto della cifra delle migliaia del quoziente per il divisore; dunque è chiaro che per ottenere questa cifra bisognerà dividere le 26 migliaia del dividendo per il divisore 7. Questa divisione di 26 per 7 si dee sapere eseguire, come abbiam detto nel caso antecedente, a memoria, e si ha 3 col resto 5; queste cinque migliaia che restano sono quelle che sono state ritenute nel moltiplicare il divisore per la cifra delle centinaia del quoziente. Trovata dunque la cifra 3 delle migliaia del quoziente, la si scrive sotto la linea orizzontale tirata per separare il divisore dal quoziente; e si scrive il resto 5 sotto la cifra delle

migliaia del dividendo. Accanto a questo resto 5 si abbassa la cifra 4 delle centinaia del dividendo; è chiaro che nelle 54 decine che così si hanno, è contenuto il prodotto del divisore per la cifra delle centinaia del quoziente; dunque per ottenere questa cifra si dividerà 54 per 7, e si avrà 7 col resto 5; si scriverà dunque 7 nel quoziente a destra della cifra 4 trovata innanzi, e il resto 5 sotto le unità del secondo dividendo parziale 54; questo secondo resto 5 non è che la cifra delle centinaia ritenute nel moltiplicare il divisore per la cifra delle decine del quoziente. Si abbasserà similmente accanto al secondo resto 5 la cifra 9 delle decine del dividendo, e si vede, come prima, che bisognerà dividere 59 per 7 per avere la cifra delle decine del quoziente; fatta mentalmente questa divisione, si ha 8 col resto 3; si scriverà dunque 8 nel quoziente a destra della cifra 7 trovata innanzi, e 3 sotto le unità del terzo dividendo parziale 59. Dipoi si abbasserà parimente accanto al resto 3 la cifra 5 delle unità del dividendo, e si avrà 35, che diviso per 7 dà esattamente 5, che si scriverà nel quoziente per cifra delle unità.

In questo esempio non essendo rimasto alcun resto, si vede che il dividendo è divisibile esattamente per il divisore, e si ha $26495 : 7 = 3787$.

Riepilogando quanto si è fatto nell' operazione eseguita, sarà manifesta la legittimità del procedimento indicato. Sapendo dalla definizione IV che il dividendo è il prodotto del divisore pel quoziente, volendo trovare questo quoziente, noi abbiam fatte le operazioni inverse di quelle che avremmo fatte se dati il quoziente e il divisore, li avessimo voluti moltiplicare per avere il dividendo. Siccome nel nostro esempio il divisore è un numero semplice, la regola data innanzi per moltiplicare un numero semplice per un numero composto, c'insegna che avremmo dovuto moltiplicare successivamente il divisore per ciascuna cifra del quoziente; la somma di tutti i prodotti parziali avrebbe formato il dividendo. Ora noi abbiamo scomposto successivamente il dividendo in questi prodotti parziali appunto, che sono stati 21, 49, 56, 35; dividendo poi ciascuno di questi per il divisore 7, è chiaro che i quozienti 3, 7, 8, 7 ottenuti sono le cifre del quoziente cercato.

80. Supponiamo che l' ultima cifra del dividendo nell' esempio

addotto in cambio di essere 5 fosse stata 8; allora facendo la divisione nel modo che abbiamo indicato, nell' abbassare l' ultima cifra del dividendo, si sarebbe avuto per ultimo dividendo parziale 38 in luogo di 35; e dividendo 38 per 7, si sarebbe trovato 5 col resto 3, che si sarebbe scritto sotto la cifra delle unità di 38. Così non avendo più niuna cifra del dividendo da abbassare, l'operazione sarebbe terminata, e il resto 3 ci farebbe vedere che il dividendo non è un multiplo del divisore. In questo caso il quoziente completo sarebbe per quello che si è veduto nel n.° antecedente, 3787 $\frac{3}{7}$.

81. Nel caso che un dividendo parziale diverso dall'ultimo fosse divisibile esattamente per il divisore, non si avendo alcun resto, nello abbassare la cifra seguente del dividendo, si avrebbe un dividendo parziale di una sola cifra, il quale perciò potrebbe essere minore del divisore; se ciò avvenisse, si dovrebbe porre zero al quoziente, ed indi abbassare la cifra seguente del dividendo, e continuare così l'operazione. Infatti si comprende che quando un dividendo parziale è un numero semplice minore del divisore, esso è la ritenuta del prodotto del divisore per la cifra dell' unità dell'ordine antecedente nel quoziente, e quindi in esso quoziente non ci hanno unità dell' ordine di quel dividendo parziale; e però si dovrà scrivere, come si è detto, zero al loro posto, a fine di conservare alle cifre seguenti il loro valore.

82. Dopo fatta questa dimostrazione del procedimento ora indicato, passeremo a far vedere com' esso potrebbesi ancora ridurre a maggiore brevità ed eleganza. Si riprenda l' esempio di sopra, e si operi come qui appresso.

26 495	7
3 787	

Dividendo, come prima, 26 per 7 si ha 3 col resto 5; si ponga il 3 sotto la cifra delle migliaia del dividendo, e in cambio di scrivere, come sopra, il resto 5 ed abbassarvi accanto la cifra 4 del dividendo, si ponga mentalmente 5 dinanzi a 4, e si divida il numero 54 che così si ha per 7, il che dà 7 col resto 5; si scriva 7 sotto le centinaia del dividendo, e s' immagini posto il resto 5 in-

nanzi la cifra 9 del dividendo; si ha così 59 che diviso per 7 dà 8 col resto 3; posto 8 sotto la cifra delle decine del dividendo, s'intenda messo il resto 3 innanzi l'ultima cifra 5 del dividendo, ottiensi così 35 che diviso per 7 dà esattamente 5, che si scriverà nel quoziente per cifra delle unità.

Questo procedimento è preferibile al primo per la sua semplicità e celerità maggiore, e per il minore spazio nel quale si restringono le operazioni; onde noi ne raccomandiamo l'esercizio ai principianti, i quali da quello che si è detto potranno formarsi la regola seguente. *Per dividere un numero composto di più di due cifre per un numero semplice, si scriva il divisore a destra del dividendo, separandoli con una linea verticale; indi si divida la prima cifra a sinistra del dividendo per il divisore, purchè ne sia maggiore; se ne sia minore, si dividano per il divisore le due prime cifre a sinistra del dividendo; si scriva il quoziente nel primo caso sotto la prima cifra a sinistra del dividendo, nel secondo sotto la seconda, e si ponga mentalmente il resto innanzi alla cifra seguente del dividendo; si avrà così un altro dividendo parziale che darà un' altra cifra del quoziente; si continuerà in questo modo finchè si sieno considerate tutte le cifre del dividendo. Quando un dividendo parziale sia minore del divisore si ponga zero al quoziente, e poi si continui l'operazione. Se nel terminare questa operazione si trovi un resto, per ottenere il quoziente completo si aggiunga al particolare già trovato la frazione vera che ha per numeratore il resto e per denominatore il divisore.*

Il lettore può applicare questa regola per suo esercizio agli esempi infrascritti.

204 024	6	5 391	4	14 563	9	21 413	7
34 004		1 347		1 618 $\frac{1}{6}$		3 059	

83.3.° Caso. Quando il dividendo e il divisore siano due numeri composti, e il quoziente un numero semplice. Questo caso ha luogo 1° quando il dividendo ha lo stesso numero di cifre del divisore, perchè allora, essendo sempre il dividendo il prodotto del divisore per il quoziente, si deduce da ciò che si è detto nel n.° 72 che il quoziente dee avere una sola cifra. Così sia da dividersi 7371

per 2457; si vede chiaramente ch'essendo $2457 \times 10 = 24570$ e $24570 > 7371$, il quoziente deve essere minore di 10, cioè un numero semplice. 2.° Quando il dividendo abbia una cifra di più che il divisore, e sia tale che togliendo la cifra delle unità, il numero che si ha sia minore del divisore. Per esempio, se abbiasi a dividere 19157 per 3452 si vede, come prima, dal n.° 72 che il quoziente potrebbe avere una o due cifre; ma essendo $3452 \times 10 = 34520$ e $34520 > 19157$, il quoziente dev'essere minore di 10, cioè un numero semplice; e ciò è avvenuto perchè le prime quattro cifre a sinistra del dividendo formano un numero minore del divisore, cioè $1915 < 3452$. Ma se questa condizione non abbia luogo, il quoziente sarà di due cifre; così dovendosi, per esempio, dividere 45279 per 2836, per essere $2836 \times 10 = 28360$ e $45279 > 28360$, è manifesto che il quoziente deve essere maggiore di 10, e quindi sarà di due cifre.

Prendiamo il primo dei due esempi riportati qui innanzi nei quali il quoziente è un numero semplice; e supponiamo che sappiasi anticipatamente potersi fare la divisione esattamente; o che vale lo stesso, non esservi alcun resto, come noi infatti abbiamo scelti i due numeri. Si disporrà l'operazione come si vede qui appresso.

7 371	2 457
	3

E si dirà: essendo $7371 = 2457 \times$ pel quoziente incognito, è chiaro che la cifra 7 delle migliaia del dividendo è il prodotto del quoziente ignoto per la cifra 2 delle migliaia del divisore, più la ritenuta del prodotto di questo quoziente per la cifra delle centinaia del divisore. Adunque si divida 7 per 2; si ha 3 col resto 1 ch'è la ritenuta detta ora. Per vedere se 3 è il quoziente cercato si ponga mentalmente 1 dinanzi la cifra 3 delle centinaia del dividendo, e si ha 13 che deve essere il prodotto del quoziente per la cifra 4 delle centinaia del divisore, più la ritenuta del prodotto del quoziente per la cifra delle decine del divisore. Ora il 4 entra veramente tre volte in 13, e si ha il resto 1, che posto similmente innanzi alla cifra 7 delle decine del dividendo, dà 17. La cifra 5

delle decine del divisore entra anche 3 volte in 17 col resto 2 che posto innanzi all' ultima cifra del dividendo dà 21, in cui entra tre volte esattamente l' ultima cifra 7 del divisore. Dunque 3 è il quoziente cercato; e si scriverà sotto la linea orizzontale destinata a separare il divisore dal quoziente.

Qui pure le operazioni da noi fatte sono le inverse di quelle onde ci saremmo serviti, se conosciuto il quoziente e il divisore li avessimo moltiplicati per ottenere il dividendo. Infatti, essendo il divisore di più cifre e il quoziente di una sola, il dividendo ch'è il loro prodotto è la somma di tutti i prodotti parziali del quoziente per ciascuna cifra del divisore; ora noi abbiamo appunto scomposto successivamente il dividendo in questi prodotti, i quali sono stati 6, 12, 15, 21; dividendo poi rispettivamente questi numeri per le differenti cifre del divisore, abbiamo sempre ottenuto 3; è chiaro dunque che 3 è il quoziente.

84. Operiamo nello stesso modo sull'esempio che segue, in cui pure si vede per le stesse ragioni detto dianzi che il quoziente è di una cifra sola

$$\begin{array}{r|l} 1\ 935 & 387 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Qui le decine del dividendo hanno due cifre, e si dirà: 19 : 3 dà 6 col resto 1 che posto innanzi alla cifra seguente del dividendo dà 13; ora 13 diviso per la seconda cifra 8 del divisore, non dà pure 6; dunque è chiaro che la ritenuta del prodotto del quoziente che si cerca per questa cifra 8 del divisore era maggiore della prima cifra di esso divisore, e però aggiunta questa ritenuta al prodotto del quoziente per questa prima cifra, il risultamento, ch'è il primo dividendo parziale, si è trovato contenere la prima cifra del divisore più volte che non indica il vero quoziente. Prenderemo dunque 5 invece di sei, e per vedere se 5 è il quoziente cercato, diremo: 3 è contenuto 5 volte in 19 col resto 4, che posto innanzi all'ultima cifra del dividendo 5 dà 35, in cui 7 entra esattamente 5 volte; dunque 5 è il quoziente che si cerca.

Se mai prendendo per quoziente 5, avessimo ancora trovato

che qualche dividendo parziale non conteneva almeno cinque volte la rispettiva cifra del divisore, avremmo preso 4; generalmente avremmo sempre diminuito successivamente di una unità il quoziente che non sarebbesi trovato buono, fino a che in ultimo saremmo giunti al vero.

Trovato ora nel nostro esempio che 5 è il vero quoziente, possiamo meglio comprendere perchè a principio eravamo stati condotti a prendere per quoziente una cifra troppo alta. Moltiplichiamo 5 per la seconda cifra a sinistra del divisore; abbiamo $5 \times 8 = 40$; dunque la ritenuta è 4; or siccome 4 è maggiore della prima cifra 3 a sinistra del divisore; aggiunto questo 4 al prodotto del quoziente per questa prima cifra, si è avuto 19, dove per conseguenza il 3 è contenuto 6 volte, cioè più che non indica il quoziente cercato 5. Da ciò si vede pure che il quoziente troppo alto che noi prenderemo supererà il vero di 1, 2, 3 ec. secondo che la ritenuta detta dianzi conterrà la prima cifra a sinistra del divisore una volta, due volte, tre volte, ec.

85. Passiamo ora al caso in cui queste tali divisioni non si potessero fare esattamente, cioè dessero un resto. Nell' esempio seguente mostreremo a quali indizi ce ne potremo avvedere.

19 157	3 452
17 260	5
1 897	

Il 3 è contenuto sei volte in 19 col resto 1 che posto innanzi la seguente cifra del dividendo dà 11; ora 4 non entra sei volte in 11; dunque per quello che si è veduto innanzi, prenderemo per quoziente 5, e diremo: 3 è contenuto cinque volte in 19 col resto 4, che messo innanzi ad 1, dà 41; il 4 è contenuto cinque volte in 41 col resto 21; ora si comprende chiaramente che questo numero 21 non è la ritenuta del prodotto del quoziente per la cifra 5 delle decine del divisore, perchè, secondo l'osservazione fatta nel n.° 73 la ritenuta del prodotto di due numeri semplici è sempre minore di ciascuno di essi, e però anche semplice; dunque si vede che il dividendo non è propriamente il prodotto del quoziente 5 per il divisore, ma è uguale a questo prodotto più

un altro certo numero minore del divisore; questo numero, come si vede, è il resto della divisione. Adunque le 41 centinaia che noi consideriamo non sono solamente il prodotto del quoziente per la cifra delle centinaia del divisore, ma contengono ancora le centinaia del resto, e quindi tolto da 41 questo prodotto il quale, come si è veduto, è 20, si è avuto 21 che contiene la ritenuta del prodotto antecedente e le centinaia provenienti dal resto. Se in cambio di 21 ch'è un numero composto avessimo trovato un numero semplice medesimamente maggiore del quoziente o della cifra che segue quella che si considera nel divisore, le ragioni dette or ora avrebbero parimente avuto luogo, e quindi saremmo anche stati sicuri di un resto. In generale dunque *allorchè dividendo un numero composto per un altro numero composto nel caso che il quoziente sia un numero semplice, si trovi in un dividendo parziale un resto maggiore o del quoziente o della cifra seguente a quella che si considera nel divisore, si può esser sicuri che la divisione non può farsi esattamente; e però puossi prendere per quoziente particolare quello che si sta provando, senza che si continui davvantaggio la ripruova*. Così, avendo noi trovato per resto 21, porremo 5 al quoziente, essendo sicuri che gli altri dividendi parziali conterranno tutti almeno cinque volte le rispettive cifre del divisore. Per trovare il resto della divisione totale, moltiplicheremo il quoziente 5 per il divisore, e scritto, come si vede nell'esempio, questo prodotto convenientemente sotto del dividendo, ne lo sottrarremo, ed avremo 1897, ch'è il resto cercato. Dunque conchiuderemo che 19157 diviso per 3452, dà 5 col resto 1897; e però il quoziente completo è $5\frac{1897}{3452}$.

86. Nella pratica, allorchè si è trovato il quoziente, per avere il resto si opera in un modo più semplice ed elegante, il quale consiste nel non iscrivere il prodotto del quoziente pel divisore, facendo a un tratto mentalmente la moltiplicazione e la sottrazione. Indicheremo il procedimento nello stesso esempio di sopra.

19 157	3 452
1 897	5

Facendo il prodotto di 3452 per 5, diremo: $5 \times 2 = 10$; ora dovendo togliere tutto il prodotto dal dividendo, noi potremo toglierne, che val lo stesso, ciascun prodotto parziale del quoziente per ciascuna cifra del divisore, e così faremo evidentemente lo stesso. Togliendo dunque 10 dal dividendo, noi diremo: da 7 unità non si possono togliere 10 unità; ora prendiamo mentalmente una decina dalla cifra seguente 5 del dividendo, ed aggiungendola alle 7 unità, avremo 17, da cui si può sottrarre 10, e si ha il resto 7, che scriveremo sotto la cifra delle unità del dividendo. Continuando la moltiplicazione, diremo: $5 \times 5 = 25$; per sottrarre questo 25 dalle decine del dividendo, osserveremo primamente che la cifra 5 delle decine del dividendo è stata in nanzi diminuita di una decina; ma noi potremo lasciarla quale è, aggiungendo però 1 al sottrattore 25, perchè così, come si è veduto nel n.° 56 il residuo non cangia. Ora è chiaro che da 5 decine non se ne possono togliere 26; noi dunque prenderemo mentalmente, come prima, delle centinaia del dividendo tante quante bastano perchè aggiunte alle 5 decine diano un numero prossimamente maggiore di 25; si vede che dovremo prenderne 3, ed avremo $35 - 26 = 9$, che si scriverà sotto la cifra delle decine del dividendo. Nello stesso modo continueremo dicendo: $5 \times 4 = 20$, a cui aggiunto 3 di cui dovrebbonsi diminuire le centinaia del dividendo, che si lasciano invece come sono, si ha 23. Da 1 non si può sottrarre 23; dunque da 31 tolto 23 si ha 8, che si scrive sotto la cifra delle centinaia del dividendo. E così appresso, $5 \times 3 = 15$ più 5 fa 18; da 19 tolte 18 resta 1 che scrivesi sotto la cifra delle migliaia del dividendo. Qui l'operazione è terminata, e il quoziente cercato è il numero 1897 che si trova scritto sotto del dividendo.

87. In ultimo farò osservare che quando nel dividere un numero composto per un altro numero composto, si sa che il quoziente è semplice, non si dee prendere per quoziente un numero maggiore di 9, ancorchè la prima cifra del divisore fosse contenuta più di nove volte nel primo dividendo parziale, perocchè altrimenti non si prenderebbe più per quoziente un numero semplice. Così se si debba dividere 3279 per 383, si vede per quello che si è detto innanzi, che il quoziente è un numero semplice; dunque

nel dividere 32 per 3, quantunque 3 entri 10 volte in 32, tuttavia si prenderà per quoziente 9. Provando poi il 9, come si è fatto di sopra, si trova troppo alto e si ha per quoziente 8.

Riepilogando quanto si è detto in questo terzo caso, stabiliremo la seguente regola. *Per dividere un numero composto per un altro numero composto nel caso che il quoziente sia un numero semplice, si scriva il divisore a destra del dividendo, frapponendovi una linea; indi si tiri una linea orizzontale sotto del divisore per separarlo dal quoziente. Fatto ciò, secondo che il dividendo ha lo stesso numero di cifre del divisore, o una di più, si divida la prima cifra, o le due prime cifre a sinistra del dividendo per la prima cifra a sinistra del divisore. Se non ci abbia alcun resto, si vegga se la seguente cifra del divisore dia un quoziente o uguale al primo o maggiore; se o non possa farsi la divisione, o si abbia un quoziente minore del primo, si tolga una unità da questo primo; si ponga mentalmente il resto della prima divisione innanzi la cifra seguente del dividendo, e se il numero che si ha diviso per la seconda cifra del divisore dia un quoziente minore di questo che si prova, si diminuisca successivamente di una unità questo quoziente, fino a che il quoziente della seconda divisione sia o uguale o maggiore del primo. E così si continui per gli altri dividendi parziali. Se mai in alcuno di codesti dividendi parziali si trovi un resto uguale o maggiore del quoziente o della cifra seguente a quella che si considera nel divisore, si scriva il quoziente che si sta provando senza continuare la pruova, e si abbia per indubitato che nella divisione si troverà un resto. Per ottenere il quale si moltiplichi il quoziente trovato per la cifra delle unità del divisore, e si tolga il prodotto dalle unità del dividendo, aggiungendo, se fia bisogno le sufficienti decine al sottraendo; si moltiplichi poi il quoziente per la cifra delle decine del divisore, al prodotto si aggiungano le decine prese innanzi perchè fosse stata possibile la prima sottrazione, e si tolga il tutto dalle decine del dividendo, aggiunte prima, se bisogni, le sufficienti centinaia al sottraendo; e in simil modo si proceda pei rimanenti prodotti.*

Siccome nell' ultimo caso che verremo qui trattando l' operazione riducesi a varie divisioni del genere delle qui indicate, così noi preghiamo il lettore di rendersi familiare l' uso di questa re-

gola. Egli potrà applicarla, per suo esercizio, agli esempi che seguono.

1 497	735	42 893	4 879	1 206	134	854	712
27	2	3 861	8		9	142	1

88. 4° Caso. Quando il dividendo, il divisore e il quoziente siano tutti e tre composti. È chiaro che questo caso ha luogo sempre che il dividendo abbia generalmente più cifre del divisore, e se ne abbia una di più, sempre che tolta la cifra delle unità il numero che si ha sia maggiore del divisore; perocchè se fosse minore, si è veduto nel n.° antecedente che il quoziente sarebbe un numero semplice. Così se si voglia dividere, per esempio, 635784 per 74 si vede per quello che si è detto nel n.° 72 circa il numero delle cifre di un prodotto di due fattori, che il quoziente è un numero composto. Lo stesso avverrebbe dividendo 3456 per 289, perchè togliendo dal dividendo la cifra 6 delle unità si ha $345 > 289$.

Si prenda il primo dei due esempi addotti, e dispongasi l'operazione, come si vede qui sotto

635 784	74
437	8 591
678	
124	
50	

Noi troveremo successivamente ciascuna cifra del quoziente, incominciando dalla sinistra. Per far ciò, cerchiamo di prendere nel dividendo il prodotto del divisore per la prima cifra a sinistra del quoziente. Le due prime cifre a sinistra del dividendo formano il numero 63 minore del divisore 74; dunque prenderemo un'altra cifra, ed avremo 635 ch' è maggiore di 74; ora è chiaro che in 635 è compreso il prodotto che noi cerchiamo; dunque dividendo 635 per 74, avremo la prima cifra a sinistra del quoziente. Questa divisione parziale rientra nel caso antecedente, perchè il quoziente è un numero semplice; dunque, secondo che

abbiamo colà stabilito, diremo: il 7 in 6 non entra; il 7 in 63 entra nove volte; ma il 4 in 5 entra meno di nove volte; dunque proveremo 8; il 7 è contenuto otto volte in 63 col resto 7, che posto innanzi 5 dà 75, in cui 4 entra più di otto volte; dunque scriveremo 8 sotto il divisore 74 per la prima cifra a sinistra del quoziente. Moltiplicheremo questa cifra trovata per il divisore, e toglieremo il prodotto dal primo dividendo parziale 635, per avere il resto; ed operando come si è indicato nel caso antecedente, diremo: $8 \times 4 = 32$; da 35 tolto 32 resta 3, che scriveremo sotto la cifra delle unità del dividendo parziale; in ultimo, $8 \times 7 = 56$, a cui aggiunte le tre decine che si sono prese perchè fosse stata possibile la prima sottrazione, si ha 59, da 63 tolto 59, resta 4, che si scrive sotto la cifra delle decine del dividendo parziale. È chiaro che il resto 43 appartiene al prodotto del divisore per la seconda cifra a sinistra del quoziente. Per avere questo prodotto si abbasserà a destra del resto 43 la seguente cifra 7 del dividendo, e si avrà 437, nel quale è contenuto il prodotto cercato. Divideremo dunque, come prima, 437 per 74, ed avremo per seconda cifra del quoziente 5, col resto 67; a destra di questo resto abbasseremo la seguente cifra 8 del dividendo, e divideremo similmente 678 per 74; avremo così 9 per terza cifra del quoziente, e 12 per resto. Abbassando l'ultima cifra 4 del dividendo avremo 124 che diviso per 74 dà 1 per ultima cifra del quoziente, col resto 50. Essendo qui esaurite tutte le cifre del dividendo, si vede che l'operazione non si è potuta fare esattamente, e che 50 è il resto della divisione. Laonde il quoziente completo è $8591\frac{50}{74}$.

Esaminando ciò che abbiam fatto in questa operazione, vediamo che noi, dal sapere che il dividendo era la somma di tutti i prodotti parziali del divisore per ciascuna cifra significativa del quoziente, e del resto, se mai ce ne fosse, abbiamo appunto scomposto il dividendo in questi prodotti parziali che sono stati 592, 370, 666, 74 e nel resto 50; indi dividendo successivamente ciascuno di questi prodotti per il divisore 74, abbiamo ottenuto a mano a mano le cifre del quoziente.

89. In questo procedimento bisogna osservare che, se, abbassando una cifra del dividendo, si trovasse un dividendo parziale minore del divisore, ciò sarebbe indizio chiarissimo che la cifra

che si cerca del quoziente è zero, e che però non dando essa alcun prodotto, il dividendo parziale che si considera appartiene al prodotto del divisore per la seguente cifra del quoziente. Noi dunque in tal caso porremo zero al quoziente, per conservare alle rimanenti cifre il loro valore, ed indi abbasseremo la cifra che vien dopo nel dividendo per continuare l'operazione nel modo indicato.

90. Ecco in conclusione la regola che dovremo avere: *Per dividere un numero composto per un altro numero composto, qualora il quoziente sia pure un numero composto, si scriva il divisore a destra del dividendo, separandoli con una linea; e tirata poi una linea orizzontale sotto del divisore per separarlo dal quoziente, si prendano a sinistra del dividendo tante cifre quante sono quelle del divisore, purchè formino un numero maggiore di esso divisore, se ciò non sia, si prenda una cifra di più. Il numero che si ha così si divida per il divisore* (come si è veduto nel caso antecedente) *e si avrà la prima cifra a sinistra del quoziente. Se abbiasi un residuo, gli si scriva a destra la seguente cifra del dividendo, e si divida il numero che si ha pel divisore. E così si continui fino a che siano esaurite tutte le cifre del dividendo. Se qualche dividendo parziale sia minore del divisore gli si abbassi a destra la seguente cifra del dividendo, e si continui l'operazione nel modo stabilito, dopo aver prima scritto zero al quoziente.*

Con questa regola sono eseguite le divisioni infrascritte.

538 456	47
68	11 456 $\frac{24}{47}$
214	
265	
306	
24	

1 840 572	348
100 5	5 289
30 97	
3 132	
000	

170 729 336	56 834
27 336	3 004
00 000	

91. Qualora il dividendo e il divisore siano terminati entrambi da zeri, l'operazione si semplicizzerebbe togliendo tutti gli zeri da quello dei due numeri che ne ha meno, e sopprimendone un ugual numero a destra dell'altro. Così dividere 80 per 40 è lo

stesso che dividere 8 per 4; perchè è chiaro che quante volte 8 unità contengono 4 unità, tante volte 8 decine contengono 4 decine; qui la differenza non è che nel nome delle unità. Si avrà parimente 4500: 90=450:9 = 50 perchè è evidente che 9 decine sono contenute in 450 decine, quante volte 9 unità sono contenute in 450 unità. Similmente si avrà 358000: 735000 = 358 : 735; 5400000: 973000 = 5400 : 973, e simili.

92. Osservazione I. Siccome si è veduto nel n.° 72 che un prodotto di due fattori o ha tante cifre quante ne hanno quei due fattori insieme o una di meno, così dal sapere che il dividendo è uguale al prodotto del divisore pel quoziente più il resto se mai ce ne abbia, e osservando che il resto non può cangiare il numero delle cifre di questo prodotto, noi possiamo conoscere *a priori* in una divisione il numero delle cifre del quoziente. Infatti essendo, pel n° citato, il numero delle cifre del dividendo la somma dei numeri delle cifre del divisore e del quoziente, o pure questa somma meno uno, s' inferisce immediatamente che *il numero delle cifre del quoziente è l' eccesso del numero delle cifre del dividendo su quello delle cifre del divisore, o quest' eccesso più uno.* Ciò è anche manifesto dal procedimento stabilito per la divisione; perchè prendendo a sinistra del dividendo o lo stesso numero di cifre del divisore o una di più, e dividendo il numero che si ha pel divisore, si ottiene la prima cifra del quoziente; indi ciascuna cifra del dividendo che si abbassa ne dà una dello stesso ordine nel quoziente; dunque si vede chiaramente che se si dovrà prendere a sinistra del dividendo una cifra di più che il divisore, il numero delle cifre del quoziente sarà l' eccesso del numero delle cifre del dividendo su quello delle cifre del divisore; se si dovrà prendere lo stesso numero di cifre, il numero delle cifre del quoziente sarà questo eccesso più uno.

II. Si è già veduto che nelle prime tre operazioni sui numeri interi si dee procedere per maggiore brevità ed eleganza da destra a sinistra; ora si osservi che il contrario è avvenuto nella divisione. E la ragione è che dovendo noi scomporre il dividendo nei prodotti parziali del divisore per ciascuna cifra del quoziente, per procedere da destra a sinistra, dovremmo prima trovare il prodotto del divisore per la cifra delle unità del quoziente; ora

questo ci sarebbe impossibile, stante che i suddetti prodotti parziali insieme col resto, se ce ne ha, trovansi riuniti in modo nel dividendo che noi non potremmo punto argomentare dalle ultime cifre a destra del dividendo, quale è il numero nel qnale è contenuto il prodotto che cerchiamo; laddove al contrario procedendo da sinistra a destra, abbiamo veduto che il numero rappresentato dalle prime cifre a sinistra del dividendo, o in egual uumero che quelle del divisore o con una di più, contiene il prodotto del divisore per la prima cifra a sinistra del quoziente.

Solo potrebbesi incominciare dalla sinistra, eseguendo la divisione con sottrarre successivamente quante volte si può il divisore dal dividendo. Ma è chiaro che questa maniera di operare sarebbe più lunga e meno elegante della prima.

Alcune altre avvertenze sulla divisione che non sono di pura necessità, si potranno leggere nella nota E.

Osservazione generale intorno le prime quattro operazioni sui numeri interi.

93. Allorchè in parlando del calcolo aritmetico, sonosi date le definizioni delle varie operazioni che ponno eseguirsi sui numeri, si è veduto che l'addizione e la moltiplicazione sono due operazioni dirette e che la sottrazione e la divisione sono le loro inverse rispettive. Ora da quanto si è fin qui detto circa queste quattro operazioni sui numeri interi, si vede che le dirette possono sempre eseguirsi, mentre le inverse non sono sempre possibili e sono più difficili ad eseguire che le dirette. Così è chiaro che si possono sempre sommare insieme vari numeri interi qualunque essi siano, e parimente se ne può sempre formare il prodotto; ma non si può sempre sottrarre un numero intero da un altro, perchè conviene che il sottraendo sia maggiore del sottrattore; nè si può sempre dividere esattamente un numero intero per un altro, perocchè oltre che il dividendo deve esser maggiore del divisore, fa d'uopo anche che ne sia un multiplo.

Comechè non siasi ancora trattato dell'innalzamento a potenza e dell'estrazione di radice, tuttavia dal sapere che di queste ope-

razioni una è un caso particolare della moltiplicazione, l'altra un caso particolare della divisione, si può conchiudere analogamente alle prime quattro, che la prima è sempre possibile, la seconda non sempre possibile e più difficile della prima.

Nelle matematiche si avrà spessissime volte a ripetere una simile osservazione; e si vedrà che i teoremi e i problemi inversi sono per la maggior parte più difficili dei diretti, e che i teoremi inversi non sono sempre veri, come i problemi inversi non sono sempre possibili.

In ultimo si osservi che delle operazioni dirette, cioè dell'addizione, della moltiplicazione e dell'innalzamento a potenza, la prima è più facile delle altre due; perocchè generalmente le operazioni che si eseguono sui numeri sono tanto più facili, quanto piu si avvicinano all'origine di essi numeri. Ora i numeri interi hanno origine dall'addizione successiva dell'unità a sè medesima; dunque l'addizione dei numeri interi che ha per obbietto di aggiungere a un numero intero tutte le unità di varii altri è la primitiva e la più semplice.

Una osservazione analoga sulla possibilità ed impossibilità, facilità maggiore o minore delle operazioni del calcolo aritmetico eseguite sulle frazioni, sarà fatta in appresso allorquando si entrerà a parlare del calcolo di esse frazioni.

Ripruova delle prime quattro operazioni sui numeri interi.

94. Si è veduto già che per eseguire le prime quattro operazioni sui numeri interi, è necessario che se ne facciano sempre alcune, che sono le più semplici, a memoria. Così nell'addizione si trova mentalmente la somma dei numeri semplici di una stessa colonna; nella sottrazione si dee sapere a memoria la differenza di ciascuna cifra del sottrattore dalla cifra corrispondente del sottraendo, o dal numero che si forma dal porre innanzi a questa cifra l'unità, e finalmente nella divisione bisogna da prima che sappiasi a memoria il quoziente di un numero minore di 100, cioè di due cifre, diviso per un numero semplice, e poi siccome si è veduto che per trovare i resti successivi è necessario che si facciano alcune moltiplicazioni ed alcune sottrazioni, così

fa d' uopo che sappiansi eseguire mentalmente quelle operazioni che così abbiam vedute farsi nella moltiplicazione e nella sottrazione.

Ora nell' effettuare una di queste quattro operazioni è facilissimo che s' incorra in qualche errore in alcuna di quelle che si eseguono a mente, sia per inganno di memoria, sia per inavvertenza e confusione nella celerità dei calcoli; è chiaro che in questo modo anche il risultamento finale sarebbe erroneo. Imperò, dopo fatta un' operazione, riman sempre in noi un certo dubbio sull'esattezza di esso risultamento. Ora se a dissipare questo dubbio, rifacessimo da capo l' operazione nello stesso modo, siccome le operazioni che si fanno a mente sarebbero le stesse, così anche gli stessi potrebbero essere gli errori; onde trovando il medesimo risultamento, non potremmo affermare di essere usciti intieramente di dubbio. Il contrario avverrebbe se operassimo in un modo differente dal primo, ma però tale che dovesse produrre il medesimo effetto, perchè allora essendo differenti le operazioni da farsi a memoria, nell' ottenere lo stesso risultamento, la probabilità di aver bene operato è tale che quasi confondesi con la certezza. Ora così appunto si suol fare; e l'operazione eseguita per accertarsi dell' esattezza della prima dicesi *ripruova* di essa.

Ecco quali sono le ripruove per le prime quattro operazioni sui numeri interi.

95. Addizione. Si sogliono usare per questa operazione tre modi differenti di ripruova, dei quali il terzo è preferibile per la sua maggiore speditezza e semplicità. Le regole ne sono le seguenti.

1.ª *Per fare la ripruova dell' addizione, se prima si è operato, secondo l' uso, da su in giù, si operi poscia al contrario da giù in su.*

Ottenendo così un risultamento identico al primo, si può esser sicuri che l' operazione primitiva è stata ben fatta. È poi quasi superfluo l'aggiungere che questa ripruova non è altro se non la prima operazione eseguita in ordine inverso, e però dee dare il medesimo risultamento di quella.

2.ª *Si faccia la somma di tutti i numeri da sommarsi, eccetto il primo; si tolga questa somma dalla totale trovata prima; se il re-*

siduo risulta uguale al primo numero non compreso nella seconda somma, l' operazione primitiva è stata ben fatta.

Qui pure la dimostraziono è così manifesta che sarebbe superfluo l'entrarne davvantaggio in parole.

3.ª *Si sommino i numeri della prima colonna a sinistra, e si tolga la somma dalle unità dello stesso ordine nel totale trovato innanzi; si abbassi a destra del residuo la cifra seguente di questo totale, e dal numero che si ottiene si sottragga la somma della seconda colonna; accanto al resto si abbassi la seguente cifra del totale, e si continui come innanzi. Se nel sottrarre la somma dell' ultima colonna, il resto è zero, il risultamento della prima operazione è esatto. Laddove in una sottrazione non si abbia alcun resto, si consideri per sottraendo la sola cifra che si dee abbassare.*

Facciamo per mezzo di questa regola la ripruova nell' esempio che segue.

```
   3 183
   7 953
     850
  ------
  11 986
   19
    18
     06
      0
```

Incominciando, secondo la regola a sommare i numeri della prima colonna a sinistra, diremo: $3 + 7 = 10$, da 11 che sono le migliaia del totale, tolto 10 resta 1, che si scrive sotto le unità del sottraendo; abbassata la seguente cifra 9 del totale a destra del resto 1, si ha 19, da cui tolta la somma cho si ottiene nella colonna delle centinaia, la quale è $1 + 9 + 8 = 18$, resta 1; accanto di questo resto si abbassi la seguente cifra 8 del totale, e si ha 18 da cui sottratta la somma proveniente dalla colonna delle decine, ch'è $8 + 5 + 5 = 18$, rimane zero; finalmente abbassata l'ultima cifra 6 del totale, e sottrattane la somma della colonna delle unità cioè $3 + 3 = 6$, si ha per ultimo resto zero; e però potremo rimaner sicuri della esattezza del risultamento trovato dianzi.

La dimostrazione di ciò è chiarissima. Se noi, togliendo succes-

sivamente le somme delle varie colonne, cioè dei vari ordini di unità dei numeri da sommarsi, dal totale che deve essere appunto l'insieme di tutte queste somme, abbiamo avuto per resto zero; vediamo che davvero il risultamento trovato è l'insieme delle dette somme, ovvero è la somma cercata.

96. Sottrazione. La ripruova di questa operazione si fa con la regola che segue.

Si faccia la somma del sottrattore e del resto; se questa somma è uguale al sottraendo, l'operazione primitiva è stata ben fatta.

Ciò segue immediatamente dalla definizione della sottrazione; questa definizione infatti c'insegna che il resto è quel numero che aggiunto al sottrattore, riproduce il sottraendo.

97. Moltiplicazione. Le regole sono due.

1.ª *Si cangi il moltiplicatore in moltiplicando, e il moltiplicando in moltiplicatore, e si faccia indi la moltiplicazione. Se il prodotto che così si ottiene è identico al primo, l'operazione primitiva è stata ben fatta.*

Per convincersi di ciò, basta ricordarsi ciò che si è ammesso ed anche in certo modo dimostrato nel n.º62 cioè che se in una moltiplicazione se si cangi il moltiplicatore in moltiplicando, il prodotto non soffre alterazione alcuna.

2.ª *Si divida il prodotto per uno dei fattori; se trovasi per quoziente l'altro fattore, la moltiplicazione è stata bene eseguita.*

Infatti, quando si sono date le definizioni delle sei operazioni del calcolo aritmetico, si è detto che la divisione è quell'operazione per la quale, dato il prodotto e uno dei suoi fattori, si trova l'altro fattore.

98. Divisione. Siccome la divisione è servita di ripruova alla moltiplicazione, così scambievolmente la moltiplicazione servirà di ripruova alla divisione, ch'è la sua inversa; ed avremo la regola seguente.

Qualora nella divisione non siasi avuto alcun resto, si moltiplichi il divisore pel quoziente; se il prodotto è uguale al dividendo, la divisione è stata ben fatta. Allorchè ei abbia un resto, si aggiunga questo resto al prodotto del divisore pel quoziente; se la somma è uguale al dividendo, si è prima operato esattamente.

Perocchè appunto si sa che nel primo caso il dividendo è il pro-

dotto del divisore pel quoziente; nel secondo è questo prodotto più il resto.

In appresso sarà data una regola assai più facile e spedita per fare la ripruova della moltiplicazione e della divisione.

Veramente queste ripruove non sono tanto in uso nei calcoli che ordinariamente occorrono, perocchè in sostanza la miglior certezza che si possa avere dell' esattezza dei risultamenti si è quella che nasce dalla coscienza di una facilità grande nel calcolare.

CAPITOLO III.

DI ALCUNE PROPRIETÀ GENERALI DEI NUMERI.

Dei numeri considerati come prodotti di più altri.

99. L'obbietto dell'aritmetica è, come abbiam veduto innanzi, lo studio della generazione elementare dei numeri, cioè il loro calcolo, che riducesi all'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, innalzamento a potenza ed estrazione di radice. Si è trattato già delle prime quattro di queste operazioni sui numeri interi, e resta ancora a dire delle due altre sui numeri interi e di tutte sei sulle frazioni. Ma per far ciò è mestieri aver prima notizia di alcune proprietà generali dei numeri, sulle quali si appoggiano intieramente tutte le regole che si verranno dando in appresso pei rimanenti casi del calcolo aritmetico. Veramente possiamo dire che, quantunque queste proprietà siano generali nell'aritmetica, ove i numeri non si considerano se non solo come interi, o come fratti, nell'algoritmia si stimeranno ancora come particolari nel modo onde noi qui le esporremo; e la ragione è che l'algoritmia non considera solamente i numeri come interi, o come fratti, ma vi aggiunge altresì una idea, che è una certa maniera di essere di essi numeri; maniera che qui non occorre di dichiarare, e che anche non potrebbe essere compresa. Così volendo ancora l'aritmetica elevarsi ad alcune proprietà generali dei numeri, non può ella uscire con ciò dal campo suo, dove i numeri, come abbiam detto da principio, si studiano in un caso particolare; perocchè infatti, secondo che abbiam veduto, ella tratta di quelle tali proprietà sui numeri considerati alla sua maniera,

ch' è appunto un caso particolare della maniera di concepirli. In ultimo farò osservare che le dimostrazioni di queste poche proprietà che si verranno qui appresso esponendo, sono facilissime e piane, perchè non risultano, come si vedrà, se non solamente dagli assiomi e dalle definizioni delle operazioni aritmetiche; e perchè elle sono le primitive o più semplici e di un numero piccolissimo a petto di tante altre ond' è ricca la scienza dei numeri, e le quali richieggono nozioni algoritmiche ben più elevate che non sono quelle dell' aritmetica.

Noi qui considereremo i soli numeri interi imperocchè quando si tratterà dei fratti si vedrà facilissimamente come la più gran parte di loro convengono modesimamente ad essi fratti.

Il lettore si sovverrà che anche nel trattare delle prime quattro operazioni sui numeri interi ci è stato bisogno di due proprietà generali dei numeri: la prima, che un prodotto non si altera se cangiasi il moltiplicando in moltiplicatore, e il moltiplicatore in moltiplicando; la seconda, che moltiplicare un numero successivamente per vari altri è lo stesso che moltiplicarlo per il prodotto di questi altri. La prima proprietà è stata in qualche modo dimostrata, ma nemmeno in tutto il suo rigore; la seconda si è semplicemente ammessa. Ora noi incominceremo appunto dalla dimostrazione di queste due verità che sono base e fondamento di tutte le altre; enuncieremo però la prima in un modo più generale.

Ma per chiarezza maggiore fa mestieri innanzi dimostrare la proposizione che segue.

100. Teorema. *Se nel moltiplicare due numeri interi si aumenti o si diminuisca il moltiplicatore di un altro numero intero, il prodotto sarà aumentato o diminuito di tante volte il moltiplicando quante unità contiene l'intero aggiunto o sottratto.*

Questa proposizione è una conseguenza immediata dell' idea che ci siam fatta della moltiplicazione. Infatti, abbiasi, per esempio $5 \times 3 = 15$; si aumenti di un numero intero qualunque, per esempio, di 4 il moltiplicatore; veggiamo qual cangiamento soffre il prodotto proposto, ovvero veggiamo a che è uguale il prodotto $5 \times (3+4)$. Noi diremo il prodotto 5×3 contiene 5 tre volte, e così ancora il prodotto $5 \times (3+4)$, cioè di 5 per 7 con-

terrà 5 sette volte, cioè tre volte più quattro volte; dunque abbiamo $5\times(3+4)=5\times3+5\times4$; dalla quale uguaglianza è manifesto che il prodotto $5\times(3+4)$ supera il proposto 5×3, di quattro volte il moltiplicando, cioè di tante volte il moltiplicando quante sono lo unità dell'intero aggiunto.

In secondo luogo considerando che viceversa il prodotto 5×3 manca dall'altro $5\times(3+4)$ per quattro volte 5, mentre appunto il moltiplicatore del primo manca di 4 da quello del secondo, s'inferisce che se si diminuisce il moltiplicatore di un numero intero, il prodotto resta diminuito di tanto volte il moltiplicando quante sono le unità dell'intero sottratto. E così restano dimostrati i due casi inchiusi nel teorema di cui è parola.

101. Teorema. *Il prodotto di più numeri interi riman sempre lo stesso qualunque sia l'ordine onde si moltiplichino i fattori.*

Per dimostrar ciò incomincieremo dal caso in cui i fattori siano due. La cosa è evidente quando essi fattori siano uguali fra loro; supponiamoli dunque disuguali. Io dico, per esempio, che $3\times5=5\times3$. Infatti, osservando che $3=1+1+1$, avremo $3\times5=(1+1+1)\times5$; ma, secondo il noto assioma, il quintuplo del tutto contiene i multipli di tutte le parti in cui è stato diviso [1], dunque $(1+1+1)\times5=1\times5+1\times5+1\times5$ cioè a $5+5+5$ ch'è quanto dire a 5 preso tre volte; dunque finalmente $3\times5=5\times3$, come si voleva dimostrare.

Per passare al caso generale di un numero qualunque di fattori, fa d'uopo dimostrare innanzi la proposiziono che segue.

102. Teorema. *Moltiplicare un numero intero per un altro che*

[1] Qui è proprio che si fa sentire la necessità di tenere per assioma questa verità, come noi abbiam fatto, quantunque ella non partecipi veramente in tutto della estrema chiarezza degli altri. Quando l'espressione numerica rappresentata da più numeri congiunti fra loro coi segni + o — stia per moltiplicatore, allora come si è veduto nel n°. antecedente, la dimostrazione è una conseguenza immediata dell'idea che si ha della moltiplicazione; ma qualora stia per moltiplicando, volendoci servire della stessa dimostrazione, dovremmo scambiar l'ordine dei fattori, e considerare quella espressione per moltiplicando. Ora non essendosi ancora dimostrato, che se cangia l'ordine dei fattori il prodotto non si altera, anzi dovendosi provare appunto questa verità, come abbiam veduto, per mezzo della verità che vorremo dimostrare, segue che necessariamente la si dee ritenere per assioma. Queste avvertenze non sono inutili, perocchè avvezzano di buon'ora i principianti al rigore e alla esattezza matematica.

sia il prodotto di vari altri è lo stesso che moltiplicarlo successivamente per ciascun fattore del secondo, cioè moltiplicarlo prima per un fattore, poi il prodotto per un altro fattore, poi il secondo prodotto per un altro, e così di seguito per quanti siano i fattori del moltiplicatore.

Supponiamo in primo luogo che i fattori del moltiplicatore siano due. Sia da moltiplicarsi, per esempio, 3 pel prodotto 5×4; dico che questo prodotto è uguale a quello di 3 per 5 moltiplicato per 4; il che si esprime così: $3 \times (5 \times 4) = (3 \times 5) \times 4$.

In fatti $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5$; dunque $3 \times (5 \times 4) = 3 \times (5 + 5 + 5 + 5)$; ma per quello che si è veduto nel n° 100, $3 \times (5 + 5 + 5 + 5) = 3 \times 5 + 3 \times 5 + 3 \times 5 + 3 \times 5$, cioè al prodotto 3×5 preso quattro volte; dunque $3 \times (5 \times 4) = (3 \times 5) \times 4$.

Siano ora tre i fattori del moltiplicatore. Abbiasi, per esempio, a moltiplicare 5 pel prodotto $3 \times 7 \times 4$. Il moltiplicatore nasce dal moltiplicare 3 successivamente per 7 e per 4, dunque essendo due i numeri per cui si moltiplica successivamente 3, si deduce, da quello che si è or ora dimostrato, che $3 \times 7 \times 4 = 3 \times (7 \times 4)$. Ora, per una simile ragione, il prodotto di 5 per $3 \times (7 \times 4)$, cioè per il prodotto dei due fattori 3 e 7×4, si ottiene moltiplicando 5 per 3 ed indi il prodotto per 7×4; e similmente moltiplicare per 7×4 è lo stesso che moltiplicare prima per 7 e poi il prodotto per 4; dunque finalmente si vede che moltiplicare 5 per $3 \times 7 \times 4$ è lo stesso che moltiplicare 5 per 3, poi il prodotto per 7, ed indi questo secondo prodotto per 4, come si voleva dimostrare. Or siccome dal caso di due fattori si è passato a quello di tre, così è facilissimo di vedere che nello stesso modo si passerebbe da quello di tre a quello di quattro, e poi da quello di quattro a quello di cinque, e così di seguito; onde la proposizione rimane dimostrata per qualsivoglia numero di fattori.

103. Dopo questa proposizione siamo in grado, come è detto di sopra, di dimostrare in tutta la sua generalità il teorema antecedente, cioè che un prodotto di qualsivoglia numero di fattori riman sempre lo stesso, qualunque sia l'ordine onde si facciano le moltiplicazioni.

Prendiamo, per esempio, il prodotto $3 \times 5 \times 7 \times 2$. Io dimostrerò che ciascun fattore potrà cangiar di posto ed occuparne uno

qualunque, senza che per questo il prodotto venga alterato. Secondo il teorema precedente, questo prodotto si può scrivere così: $(3\times5)\times(7\times2)$; ora il primo fattore 3×5 è lo stesso che 5×3, per quello che si è dimostrato nel n.° 101 per il caso di due fattori; dunque $(3\times5)\times(7\times2)=(5\times3)\times(7\times2)$; ma il secondo membro di questa uguaglianza è lo stesso che $5\times3\times7\times2$; dunque finalmente $3\times5\times7\times2=5\times3\times7\times2$. Dalla quale uguaglianza è manifesto che il primo fattore 3 del prodotto proposto è passato a secondo, senza che per questo siasi cangiato esso prodotto. Per dimostrare che questo fattore 3 potrebbe anche passare indifferentemente al terzo posto, si osservi che l'ultimo prodotto trovato $5\times3\times7\times2$ è lo stesso che $5\times(3\times7\times2)$; ora nel fattore $3\times7\times2$ il primo fattore 3 può mettersi per secondo, per quello che si è or ora dimostrato, senza che il prodotto cangi; dunque $5\times(3\times7\times2)=5\times(7\times3\times2)$; quest'ultimo prodotto è lo stesso che $5\times7\times3\times2$; quindi il prodotto proposto $3\times5\times7\times2$ è uguale a $5\times7\times3\times2$; dal che si vede che il primo fattore si è fatto passare per terzo senza alterazione alcuna del prodotto. È palese ora che nello stesso modo si dimostrerebbe che il fattore 3 può occupare il quarto posto. Quello che si è dimostrato per il fattore 3 si può dimostrare medesimamente per qualunque altro fattore; dunque è chiaro che il prodotto di più numeri interi riman sempre lo stesso, qualunque sia l'ordine onde si moltiplichino i fattori.

104. Teorema. *Se in un prodotto uno dei fattori sia divisibile esattamente per un numero, il prodotto sarà pure divisibile esattamente per questo numero.*

Sia il prodotto 5×12, e sia il fattore 12 divisibile esattamente per 4; dico che anche il prodotto 5×12 sarà divisibile esattamente per 4. Infatti, il dire che 12 è divisibile per 4 significa che 12 è il prodotto di 4 per un altro numero, ch'è il quoziente; questo altro numero è 3, e si ha $3\times4=12$; dunque il prodotto proposto 5×12 è lo stesso che $5\times3\times4$; quest'ultimo, secondo il teorema dimostrato nel n.° 102, è lo stesso che $(5\times3)\times4$; il qual numero è divisibile esattamente per 4, e dà per quoziente 5×3, cioè 15; dunque finalmente il prodotto 5×12 è divisibile per 4.

105. Teorema. *Se un numero è divisore esatto di due altri nu-*

meri, sarà pure divisore esatto della somma e della differenza di due multipli qualunque di essi numeri.

Sia, per esempio, il numero 3 divisore esatto di 9 e di 6; siano 36 e 12 due multipli rispettivi qualunque di 9 e di 6; dico che il numero 3 dividerà esattamente la somma e la differenza di questi multipli, cioè i due numeri $36+12$ e $36-12$.

Il numero 36 essendo il quadruplo di 9 si può scrivere 4×9, e parimente il numero 12, come il doppio di 6, si può scrivere 2×6; onde questa somma e questa differenza si cangiano nelle due $4\times9+2\times6$, $4\times9-2\times6$. Ora, secondo il teorema precedente, il prodotto 4×9 è divisibile esattamente per 3, perocchè 3 è divisore esatto del fattore 9; il simile si dica del prodotto 2×6; dunque siccome le due parti sono divisibili per 3, così anche il tutto $36+12$ sarà divisibile esattamente per 3. Finalmente è chiaro dopo ciò che ancora $36-12$ è divisibile esattamente per 3.

106. Teorema. *Dividere un numero per il prodotto di più altri è lo stesso che dividerlo successivamente per ciascun fattore, cioè dividerlo prima per un fattore, poi il quoziente per un secondo fattore, poi il nuovo quoziente per un terzo, e così di seguito per quanti siano i fattori del divisore.*

Abbiasi a dividere $3\times5\times7\times2$ pel prodotto $5\times7\times2$; è chiaro che il quoziente è 3. Ora se si divida il numero $3\times5\times7\times2$ per 5, si ha per quoziente $3\times7\times2$, se si divida questo quoziente per 7, si ha 3×2; e finalmente se si divida quest'ultimo quoziente per 2, si ha 3. Dunque dividendo $3\times5\times7\times2$ per $5\times7\times2$, si ha lo stesso quoziente che dividendolo successivamente per 5, 7, 2 che sono i fattori del divisore.

107. Teorema. *Moltiplicando o dividendo un fattore di un prodotto per un numero, si moltiplica o si divide il prodotto per quel numero.*

Del prodotto $4\times5\times7$ si moltiplichi il primo fattore 4 per 3; dico ch'esso prodotto sarà medesimamente moltiplicato per 3. Infatti sostituendo nel prodotto proposto al fattore 4 il suo multiplo 3×4, si avrà $(3\times4)\times5\times7$; e questo prodotto, secondo il teorema del n.° 102 è lo stesso che quest'altro $3\times(4\times5\times7)$, cioè al triplo del prodotto proposto. Dunque, triplicando un fattore 4, si è triplicato il prodotto; come facea d'uopo dimostrare.

Viceversa, paragonando il prodotto $4\times5\times7$ all'altro $(3\times4)\times5\times7$, si vede che il primo è terza parte del secondo, perchè il fattore 4 dell'uno è terza parte del fattore 3×4 dell'altro.

108. Corollario I. *Moltiplicando o dividendo vari fattori di un prodotto per vari numeri, il prodotto viene ad essere moltiplicato o diviso per il prodotto di quei numeri.*

Infatti, moltiplicando un fattore per un numero, il prodotto, pel teorema qui dimostrato, viene ad essere moltiplicato per quel numero; poi moltiplicando un altro fattore per un altro numero, il secondo prodotto si moltiplica similmente per quest'altro numero, e così di seguito. Onde il prodotto proposto viene ad essere moltiplicato successivamente per tutti quei numeri; dunque, secondo il teorema del n.° 102, esso sarà moltiplicato per il prodotto di tutti quei numeri.

È palese ora como in un modo analogo si dimostrerebbe che dividendo vari fattori per vari numeri, il prodotto resta diviso per il prodotto di quei numeri.

109. II. *Moltiplicando uno o più fattori di un prodotto per uno o più numeri, e dividendo simultaneamente un altro o più altri fattori per lo stesso o per gli stessi numeri, il prodotto non cangia.*

Imperocchè risulta da ciò che si è dimostrato nel corollario antecedente, che la seconda operazione distrugge interamente l'effetto della prima.

110. III. 1.° *In una divisione moltiplicando o dividendo per un numero il dividendo senza alterare il divisore, il quoziente resta moltiplicato o diviso per quel numero.* 2.° *Al contrario, moltiplicando o dividendo per un numero il divisore, senza alterare il dividendo, il quoziente resta diviso o moltiplicato per quel numero.*

1.° Ciò nasce dacchè il dividendo è il prodotto del divisore pel quoziente. Ora se questo prodotto si trova moltiplicato o diviso per un numero, se ne argomenta, secondo ciò che si è detto nel corollario I, che uno dei suoi due fattori è stato moltiplicato o diviso per quel numero; ma, per ipotesi, il divisore rimane lo stesso; dunque il quoziente, ch' è l'altro fattore, resta moltiplicato per quel numero.

2.° In secondo luogo, se, rimanendo lo stesso il dividendo, ch'è il prodotto, il divisore, ch' è uno dei suoi fattori è stato moltipli-

cato o diviso per un numero, si deduce da quello che si è veduto nel corollario II, che l'altro fattore, cioè il quoziente è stato al contrario diviso o moltiplicato per quel numero.

111. IV. *Moltiplicando o dividendo simultaneamente tanto il dividendo quanto il divisore per un medesimo numero, il quoziente non cangia.*

Perocchè da quello che si è or ora dimostrato risulta evidentemente che il quoziente viene in entrambi i casi ad essere moltiplicato e diviso simultaneamente per lo stesso numero; quindi l'effetto della seconda operazione distruggendo quello della prima, il quoziente rimane lo stesso.

Osservazione. Qualora in una divisione si moltiplichi o si divida simultaneamente il dividendo e il divisore per un medesimo numero, il quoziente, come si è veduto, rimane lo stesso; ma è da notare che il resto della seconda divisione resta moltiplicato o diviso per quel numero. In fatti, sia, per esempio, da dividersi 17 per 5; si avrà per quoziente 3 e per resto 2; onde sarà $17=5\times3+2$; ora si moltiplichino i due membri di questa uguaglianza per il medesimo numero 4; è evidente che l'uguaglianza rimarrà. Per fare questa moltiplicazione si osservi che il secondo membro è composto dalle due parti 5×3 e 2; dunque per moltiplicare il tutto per 4, si moltiplicheranno per 4 le sue parti; la prima parte ch'è un prodotto sarà moltiplicata per 4 moltiplicando per 4 un suo fattore 5 (108); dunque avremo $4\times17=(4\times5)\times3+4\times2$. Questa uguaglianza ci mostra appunto ciò che si voleva dimostrare, cioè che avendo moltiplicato per 4 tanto il dividendo 17 quanto il divisore 5, il quoziente 3 è rimasto lo stesso, ma il resto 2 è stato moltiplicato per 4. Si vede facilissimamente che il resto sarebbe stato diviso per 4 se si fosse diviso simultaneamente per quello stesso numero il dividendo e il divisore.

Faremo di più osservare che *il resto della divisione di un prodotto è lo stesso che quello che dà il prodotto dei resti dei due fattori.*

Infatti, sia da dividersi per 5 il prodotto 12×19; questo potrà scriversi $(10+2)\times(15+4)$, ed eseguendo la moltiplicazione indicata si avrà $10\times15+2\times15+10\times4+2\times4$; ora le tre prime parti sono divisibili esattamente per 5; dunque il resto della divisione

del prodotto è quello che dà l'ultima parte 2×4, cioè il prodotto dei resti dei due fattori.

112. V. ***Se due prodotti sono composti dello stesso numero di fattori divisibili esattamente ciascuno per ciascuno, il quoziente dell'uno diviso per l'altro è uguale al prodotto dei quozienti di ciascun fattore del dividendo diviso pel corrispondente fattore del divisore.***

Siano i due prodotti $8\times15\times42$, $2\times3\times7$, dei quali il primo è composto di tre fattori divisibili rispettivamente per i fattori del secondo; io dico che il quoziente che si ottiene dividendo il primo pel secondo è lo stesso che il prodotto dei quozienti che si hanno dividendo ciascun fattore dell' uno per il corrispondente dell' altro; il che si esprime così: $(8\times15\times42):(2\times3\times7)=(8:2)\times(15:3)\times(42:7)$.

Essendo i fattori 8, 15, 42 multipli rispettivamente degli altri 2, 3, 7, si potranno scrivere così 4×2, 5×3, 6×7; onde il primo prodotto si scriverà in questo modo: $4\times2\times5\times3\times6\times7$; questo prodotto, secondo quello che si è dimostrato nel n°. 101, non sarà punto alterato, cangiando comunque l'ordine dei fattori; ora si dispongano l'uno accanto dell'altro i tre fattori del secondo dei due prodotti proposti; si scriverà $4\times5\times6\times(2\times3\times7)$. È chiaro che questo prodotto, ch'è il primo dei due proposti, diviso per $2\times3\times7$, ch'è il secondo, dà per quoziente $4\times5\times6$; i tre numeri 4, 5, 6, com'è palese, sono i quozienti che si hanno dividendo rispettivamente i fattori del primo dei due prodotti proposti per quelli del secondo; dunque il quoziente che si ottiene dividendo il primo prodotto pel secondo, è uguale al prodotto dei quozienti che si hanno dividendo i fattori del primo pei loro corrispondenti nel secondo.

113. TEOREMA. *Un numero che divide esattamente due altri, divide anche esattamente il resto che si ha, se pure ce n'abbia, dividendo il maggiore per il minore.*

I due numeri 15 e 9 siano entrambi divisibili esattamente per 3; dico che il resto che si ha dividendo 15 per 9 è anche divisibile esattamente per 3.

Dividendo 15 per 9, si ha per quoziente 1 e per resto 6; dunque $15=1\times9+6$; ora è chiaro che se 15 è divisibile, per ipotesi, esattamente per 3, anche la quantità $1\times9+6$, che gli è

uguale dev' essere esattamente divisibile per 3. Ma la prima parte 1×9 è chiaramente divisibile per 3, poichè, per ipotesi, il fattore 9 è divisibile per 3 (104); dunque perchè il tutto sia, come si è dimostrato che è, divisibile esattamente per 3, conviene che l'altra parte 6, cioè il resto, sia divisibile esattamente per 3.

114. Teorema. *Se un numero divide esattamente il resto e il divisore, dividerà esattamente il dividendo.*

Si riprenda l'esempio del numero precedente $15 = 1 \times 9 + 6$; il resto 6 e il divisore 9 siano divisibili entrambi esattamente per 3; dico che per questo anche il dividendo 15 sarà divisibile esattamente per 3.

Infatti della quantità $1 \times 9 + 6$ la parte 6 è, per ipotesi, divisibile per 3, l'altra parte 1×9 è pure divisibile per 3, perchè, per ipotesi 3 è divisore esatto del fattore 9; dunque tutta la quantità $1 \times 9 + 6$, e però anche 15 che l'è uguale è divisibile esattamente per 3.

115. Definizione. I. *Un numero intero si chiama* primo *quando non ha alcun divisore esatto diverso dall'unità e da sè stesso.*

Così i numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, ec. sono primi, perchè ciascuno di essi non è divisibile esattamente se non per l'unità e per sè medesimo. Si sa che non vi è un numero intero il quale non sia divisibile esattamente per l'unità e per sè stesso, perchè ogni numero si può considerare come il prodotto dell'unità per sè stesso. Ora alcuni numeri non sono solamente il prodotto dell'unità per loro medesimi, ma nascono anche dal moltiplicare vari altri numeri fra loro, e però non sono divisibili solamente per l'unità e per loro stessi, ma ancora per questi loro fattori; tali, per esempio, sono i numeri 8, 24, 50, 360, e infiniti altri. Alcuni altri numeri interi poi sono tali che non esistono altri numeri interi, salvo l'unità e loro stessi, i quali moltiplicati diano questi numeri; ond'è ch'essi non hanno altri divisori esatti se non l'unità e loro stessi.

Adunque in queste due specie si dividono i numeri interi: altri sono primi, altri non sono.

Diverse tavole sono state formate di numeri primi, quali più, quali meno estese. Indicherò particolarmente quelle di Chernac, dove si trovano tutti i numeri primi fino a 1 000 000.

Ecco in qual modo si ponno formare semplicissimamente que-

ste tavole. *Si scrivano successivamente tutti i numeri impari 3, 5, 7, 9, ec.; fino a quel limite che si vuole, ed indi si cancellino da questa serie tutti i multipli di 3, tutti quelli di 5, tutti quelli di 7 ec.; scritti i due numeri 1, 2 pei primi della serie che rimarrà, si avranno tutti i numeri primi cercati.*

In fatti è chiaro che tutti i numeri che così resteranno non saranno divisibili per altri numeri interi differenti dall'unità e da loro stessi, e però saranno primi.

In quanto poi al modo che si dovrà tenere per vedere ove sono quei multipli che si sono detti per cancellarli, è chiaro che quei di 3 si troveranno contando i numeri della serie anzi detta dei numeri impari a 3 a 3 a partire da 3, quelli di 5, contandoli a 5 a 5, incominciando da 7, e così di seguito.

Parlando delle tavole dei numeri primi si suol sempre citare il famoso *crivello di Eratostene*, filosofo di Alessandria il quale fiorì 280 anni prima dell'era cristiana; e però non fia superfluo il descriverlo. Esso consiste in una tavola in fronte alla quale sono disposti l'uno appresso dell' altro i numeri impari 3, 5, 7, ec.; indi percorrendo successivamente questi numeri, e contandoli a 3 a 3, a 5 a 5, a 7 a 7 ec., al posto dei multipli che si debbono cancellare si trovano altrettanti fori, pei quali s'immagina che quei multipli siansi sfuggiti; è chiaro per quello che si è veduto innanzi, che così non restano sulla tavola se non i soli numeri primi.

116. II. *Due numeri interi si chiamano* primi fra loro *quando non hanno alcun divisore comune esatto diverso dall'unità.*

Tali sono, per esempio, i due numeri 8 e 9, perocchè è chiaro che 8 è divisibile per 2, per 4 e in ultimo per sè stesso; 9 è divisibile per 3 e per sè medesimo, ma i divisori esatti dell'uno sono differenti da quelli del secondo. È chiaro poi che questi due numeri hanno per divisore comune esatto l'unità, perocchè tutti i numeri sono divisibili esattamente per essa unità.

Da questo esempio si vede che due numeri possono essere primi fra loro, benchè ciascuno non sia primo in sè. Se poi ciascuno sia primo, sono di necessità primi fra di loro; infattti allora ciascuno di essi è divisibile solo esattamente per l'unità e per sè stesso, ed anche non potendo l'uno, perchè primo, essere divisibile

per l'altro, s'inferisce ch'ei non hanno altro divisore comune esatto fuorchè l'unità, cioè che sono primi fra di loro. Se poi un solo di essi è primo, per non essere primi fra loro conviene che l'altro ne sia un multiplo; perchè infatti il divisore comune non può essere altro che il primo, perchè questo non è divisibile se non solamente per l'unità o per sè stesso; dunque l'altro deve essere divisibile per il primo, cioè dev'esserne un multiplo.

117. Teorema. *Un numero primo non può dividere esattamente un prodotto se non divide esattamente uno dei suoi fattori.*

Questa proposizione è di grandissimo momento per le molte ed utilissime conseguenze che se ne verranno deducendo in appresso e però è necessario che le sia prestata un'attenzione grande.

La dimostreremo per via di assurdo. Supponiamo che il numero primo 5 non divida esattamente nè il numero 13 nè il numero 19, e divida intanto il loro prodotto 31×19. Dividiamo il primo ed il secondo dei due numeri proposti per 5; avremo da una parte 2 col resto 3, dall'altra 5 col resto 4; sicchè sarà $13=2\times5+3$ e $19=3\times5+4$. Ora è chiaro che il prodotto dei due primi membri di queste uguaglianze dev'essere uguale al prodotto dei due secondi. Per fare la moltiplicazione dei secondi membri, si osservi che, secondo il n°. 100, il prodotto di $2\times5+3$ per $3\times5+4$ è uguale al prodotto di $2\times5+3$ per 3×5, cioè per 15, più il prodotto di $2\times5+3$ per 4; ma, pel noto assioma un multiplo del tutto è la somma dello stesso multiplo di tutte le parti; dunque $(2\times5+3)\times15=2\times5\times15+3\times15$ e $(2\times5+3)\times4=2\times5\times4+3\times4$; e però il prodotto proposto 13×19 è lo stesso che la quantità $2\times5\times15+3\times15+2\times5\times4+3\times4$. Ma, per ipotesi, 5 divide il prodotto 13×19; dunque dividerà pure la quantità che gli è uguale; ora è chiaro che le tre prime parti di questa quantità sono divisibili per 5, perchè 5 si trovi per fattore in ciascuna di esse; dunque giacchè tutta la quantità e divisibile per 5, anche la rimanente parte 3×4 dev'essere divisibile per 5, ch'è quanto dire deve esserne un multiplo: supponiamo che ne sia il doppio, cioè che si abbia $3\times4=2\times5$.

Prima di passare innanzi si osservi, 1° che 3 e 4, cioè i resti

che si sono avuti dividendo i due numeri proposti per 5, non possono essere zero nè l'uno nè l'altro, perocchè i numeri proposti per ipotesi non sono divisibili per 5; 2°. che questi resti sono minori del divisore 5; 3°. che ciascuno di essi non può essere uguale all'unità, perocchè se si avesse, per esempio, $3=1$, l'ultima uguaglianza trovata di sopra si ridurrebbe a $1\times4=2\times5$, il che non può essere, perchè $4<5$.

Adunque l'uguaglianza $5\times4=2\times3$ esprime che ci hanno due numeri 3 e 4 maggiori dell'unità e ciascuno minore di 5, il cui prodotto è divisibile per 5; è di qui appunto che nascerà l'assurdo.

Essendo il resto 3 minore di 5, noi possiamo dividere 5 per 3; abbiamo così 1 col resto 2; onde sarà $5=1\times3+2$, e quindi $5\times4=1\times3\times4+2\times4$. Ora il secondo membro dev'essere divisibile per 5, perchè il primo è divisibile per 5; ma la prima parte è divisibile per 5, perchè si è dimostrato che 3×4 è divisibile per 5, dunque la seconda dev'essere ugualmente divisibile per 5.

Qui osserveremo che il resto 2 trovato nel dividere 5 per 3 è minore del divisore 3, e di più che non può essere zero, perchè 5, come numero primo, non è divisibile per 3.

Ora è chiaro che come dal prodotto 3×4 divisibile per 5 si è passato all'altro minore 2×4 pure divisibile per 5 e maggiore di zero, così da quest'ultimo si passerà ad altri successivamente minori, e tutti maggiori di zero e divisibili per 5. Ma continuando così si dovrà pervenire ad un prodotto minore di 5 e che non sia zero il quale sarà divisibile per 5, il che è un assurdo; dunque l'ipotesi sulla quale si è ragionato non può sussistere.

Dunque un numero primo non può dividere esattamente un prodotto se non divide uno dei suoi fattori.

Questo teorema è l'inverso di quello del n°. 104, ove si è dimostrato che se in un prodotto uno dei fattori è divisibile per un numero, il prodotto sarà pure divisibile per questo numero.

118. Teorema. *Non ci ha che un solo sistema di numeri primi il cui prodotto sia uguale ad un numero dato che non sia primo, o in altri termini due numeri dati non primi non ponno essere uguali se non sono composti di fattori primi uguali ciascuno a ciascuno e quindi anche dello stesso numero.*

Sia 7 un fattore di uno dei numeri che abbiamo detti, questo numero sarà divisibile per 7; quindi anche l'altro che gli è uguale sarà divisibile per 7. Ma, in virtù del teorema precedente, 7 per dividere quest' altro numero deve dividere uno dei suoi fattori; questi fattori, per ipotesi, sono primi, e però divisibili solamente per l' unità e per sè stessi; dunque conviene che quest'altro numero abbia 7 per uno dei suoi fattori primi. Ragionando nello stesso modo per tutti gli altri fattori, si conchiude che i due numeri debbono necessariamente esser composti dello stesso numero di fattori.

Dunque non ci ha che un solo sistema di numeri primi il cui prodotto sia uguale ad un numero dato che non sia primo. [1]

Numerosissimi sono i corollari che si deducono da questa proposizione; io qui noterò i principali e di più frequente occorrenza.

119. Corollario I. ***Un prodotto di più numeri contiene tutti i fattori primi di questi numeri e non ne contiene altri.***

Infatti è chiaro da prima da ciò che si è detto nel n.° 102 che il prodotto dee contenere tutti i fattori primi di quei numeri; in secondo luogo si è dimostrato or ora che non ci ha che un sol sistema di numeri primi, il cui prodotto sia uguale ad un numero dato; dunque ec..

120. II. ***Due prodotti di numeri interi sono primi fra loro qualora tutti i fattori dell'uno siano primi per rispetto a quelli dell'altro.***

S' immagini scomposto ciascuno di quei due numeri nei suoi fattori primi; è chiaro che i primi fattori saranno differenti dai secondi; dunque si vede che i divisori dell' uno dei numeri propo-

[1] Questa dunque è una legge generale di ogni numero che non sia primo: se N è un numero non primo, esso è sempre della forma $N = a^m\ b^n\ c^p \ldots\ldots$, rappresentando con a, b, c dei numeri primi qualunque e con m, n, p dei numeri interi positivi, potendo anche essere uno di essi uguale all' unità o a zero. Dei numeri primi non si è per anco trovata niuna legge generale; nè si può considerare come tale quella trovata dal Legendre e da lui detta *di reciprocità*, la quale consiste in questo, che se i numeri primi m ed n sono entrambi della forma $4x+3$, si avrà generalmente $\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$, e se non sono entrambi di questa forma, si avrà $\frac{m}{n} = -\frac{n}{m}$. *Théorie des nombres* n.° 164.

sti sono tutti differenti da quelli dell'altro, cioè che i due numeri sono primi fra loro.

121. III. *Se due numeri sono primi fra loro, due potenze qualunque di essi sono medesimamente due numeri primi fra loro.*

Imperocchè esse saranno due prodotti di fattori primi, e i primi fattori saranno differenti dai secondi; dunque, in virtù del corollario precedente, queste due potenze sono due numeri primi fra loro.

122. IV. *Se un prodotto di due fattori è divisibile per un numero che sia primo per rispetto ad uno di essi, questo numero dee dividere l'altro fattore.*

Questo numero infatti dee essere fattore di quel prodotto; dunque il prodotto dee contenere tutti i suoi fattori primi (119); ma, per ipotesi, questi fattori non si trovano nel primo fattore; dunque essi dovranno trovarsi nel secondo, ch' è quanto dire questo secondo fattore dev' essere divisibile per quel numero.

123. V. *Due fattori minori entrambi di un numero primo non ponno dare un prodotto divisibile per questo numero.*

Perocchè questo numero primo per dividere quel prodotto, dovrebbe esserne fattore; or questo per l'ipotesi fatta è impossibile, perchè i fattori primi in cui si scompongono i due numeri che dànno quel prodotto, essendo essi numeri minori di quel numero primo, sono minori di questo numero primo; dunque il prodotto non può essere divisibile pel numero primo.

124. Problema. *Trovare tutti i divisori di un numero dato.*

Sia 840 il numero dato; incominceremo dal trovare tutti i suoi divisori primi; il metodo da seguire è manifesto. Se si divida questo numero successivamente per tutti i suoi fattori primi, il quoziente dev' essere l' unità; infatti, secondo il teorema dimostrato nel n.° 106, dividere questo numero successivamente per quei fattori sarà lo stesso che dividerlo pel loro prodotto; ma, per ipotesi, il loro prodotto è uguale al numero stesso, e un numero diviso per sè medesimo dà per quoziente l' unità; dunque dividendo successivamente il numero pei suoi fattori primi, all' ultimo si dovrà trovare per quoziente l' unità. Ora noi, quantunque non conosciamo questi fattori, sappiamo pure ch' ei sono primi; dunque il metodo che seguiremo sarà questo indicato dalla regola se-

guente : *Si divida il numero proposto successivamente per 2, ch'è il primo numero primo, quante volte si può; giunto che si sarà ad un quoziente non divisibile per 2, si vegga se può dividersi per 3, ch' è il secondo numero primo, e se ciò avvenga si divida questo quoziente successivamente per 3 quante volte si può; lo stesso facciasi per gli altri numeri primi consecutivi 5, 7, 11, ec. fino a che si giunga ad avere per quoziente l'unità, il che sempre avverrà dacchè i quozienti successivi vanno sempre diminuendo. Terminata così l'operazione, i divisori primi del numero dato saranno i numeri primi pei quali si è diviso successivamente quel numero, preso ciascuno una volta sola.*

Applichiamo la regola indicata all'esempio 840 addotto di sopra: l'operazione si disporrà nel modo che si vede qui sotto.

		1
840	2	2
420	2	4
210	2	8
105	3	3, 6, 12, 24
55	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120
7	7	7, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168
1		70, 140, 280, 105, 210, 420, 840.

I numeri che si trovano nella prima colonna a sinistra sono i vari quozienti successivi che si hanno colla regola data; al fianco loro nella seconda colonna sono i numeri primi che si prendono per divisori; è chiaro che questi sono i fattori primi del numero proposto; dunque i divisori primi di questo numero sono 2, 3, 5, 7. E qui faremo osservare di passaggio che non bisogna confondere i fattori primi coi divisori primi di un numero; perocchè parlando dei fattori primi non si pon mente solo a ciascun numero primo che si prende per fattore, ma ancora a quanto volte lo si prende; mentre considerando i divisori primi ciascun numero primo si prende una sola volta. Così nel nostro esempio i fattori primi del numero proposto sono 2, 2, 2, 3, 5, 7, laddove i divisori primi sono 2, 3, 5, 7. In ultimo si osservi che il procedimento da noi indicato serve insieme a trovare i fattori primi e i divisori primi di un numero dato; e così dovea essere, perocchè i secondi sono conseguenza dei primi.

Trovati che sono i fattori primi, è chiaro che moltiplicandoli in tutti i modi possibili a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec. si troveranno gli altri divisori del numero dato. Appartiene all'algebra il determinare il numero di questi prodotti che possono formarsi nel modo che abbiam detto, dato il numero dei fattori primi; ma qui punto non ci cale di sapere il numero degli altri divisori del numero; vogliamo solo conoscerli particolarmente. Noi indicheremo dunque solo la maniera che si tiene per ritrovarli.

In testa della prima colonna, ma al di sopra della linea che contiene il numero 840, si scrive l'unità, la quale è il primo divisore di ogni numero intero. Indi si moltiplica questa unità per il primo numero della seconda colonna, e si ha il divisore 2; poi si moltiplicano i divisori 1 e 2 pel secondo numero della seconda colonna, ed omettendo la ripetizione del divisore 1×2, o 2, si avrà l'altro divisore 4; indi si moltiplicano i divisori trovati 1, 2, 4 pel terzo numero della seconda colonna ed omettendo la ripetizione dei fattori 2 e 4, si avrà il nuovo divisore 8. Continuando in questo modo, allorchè si sarà pervenuti a moltiplicare tutti i divisori trovati per l'ultimo numero 7 della seconda colonna, si avrà un'ultima serie di divisori la quale sarà terminata dal numero proposto 840, ch'è il massimo divisore di sè stesso. In questo modo si troveranno scritti a destra della seconda colonna tutti i divisori del numero dato e primi e non primi.

Farò notare che qualora i numeri primi che si dovranno prendere per divisori sono pochi e non molto maggiori l'un dell'altro, è facile sapere a memoria tutta la serie dei numeri primi che si dovrà percorrere nell'operazione; in caso contrario, ciò può divenire difficile, e si può far uso all'uopo delle tavole di numeri primi da noi descritte innanzi.

125. Teorema. *Il massimo comun divisore di più numeri è il prodotto di tutti i fattori primi comuni di quei numeri.*

Innanzi tratto l'espressione stessa di *massimo comun divisore* esprime chiaramente quello che noi intendiamo per essa. Un numero può dividere esattamente vari altri numeri; quando è il maggiore di tutti i divisori comuni di quei numeri, si chiama il loro massimo comun divisore.

Evidentemente quei numeri non hanno ad essere tutti primi in sè stessi, perchè non debbono essere primi fra loro; secondo ciò che si è veduto nel n.º 106, se alcuni siano primi, gli altri conviene che siano multipli di questi.

Ora siano i due numeri 2310 e 504; scomponendo questi nei loro fattori primi nel modo esposto nel problema antecedente si ha pel primo $2\times3\times5\times7\times11$, pel secondo $2\times2\times2\times3\times3\times7$. È chiaro ch'entrambi questi numeri sono divisibili per $2\times3\times7$, ch'è il prodotto dei fattori primi comuni ad essi numeri; di più questo prodotto è il loro massimo comun divisore, perocchè se vi si comprende qualche altro fattore, questo non essendo comune ai due numeri, fa sì che il prodotto che nasce divide bensì il numero a cui quel nuovo fattore appartiene, ma non l'altro; ch'è quanto dire non è un divisor comune dei due numeri. Dunque il massimo comun divisore di due numeri è il prodotto di tutti i fattori primi comuni di questi numeri.

Dopo ciò è chiaro che se si voglia trovare il massimo comun divisore tra due numeri si scomporranno questi nei loro fattori primi, e il prodotto che si formerà di tutti i fattori primi comuni ai due numeri sarà il loro massimo comun divisore. Lo stesso si farà se i numeri dati siano più di due.

Ma potrebbe anche essere più facile la ricerca del massimo comun divisore, facendo uso del procedimento che indicheremo qui appresso. Questo procedimento si ricava dal teorema che segue.

126. Teorema. *Il massimo comun divisore di due numeri è massimo comun divisore tra il minore di essi e il resto che si ha dividendo il maggiore per il minore.*

Prima di tutto è chiaro che se il maggiore fosse esattamente divisibile per il minore, questo minore sarebbe il massimo comun divisore. Ma supponiamo che la divisione desse un resto; si riprendano i due numeri riportati di sopra 2310 e 504; dividendo il primo per il secondo si ha per quoziente 4 e per resto 294; onde avremo $2310 = 504 \times 4 + 294$. In primo luogo si vede chiaramente che il massimo comun divisore tra i due numeri proposti è divisore esatto del resto 294, perchè dividendo 2310, dee dividere pure la quantità $504 \times 4 + 294$, che gli è uguale; ma divide la prima parte 504×4, perchè, per ipotesi, è divisore esatto del fattore 504; dunque dee dividere ancora l'altra parte 294.

Si è così dimostrato che il massimo comun divisore tra i due numeri proposti è divisor comune del minore di essi 504 e del resto 294 che si ha dividendo l'uno per l'altro; dico ora ch'è il massimo. Infatti, se non è, vi sarà un divisor comune di 504 e 294 maggiore di esso; allora questo dividerà esattamente la quantità $504 \times 4 + 294$, perchè divide ciascuna delle due parti; dunque dividerà pure esattamente il numero 2310 ch'è uguale a questa quantità. Così esso è divisor comune dei due numeri 2310 e 504; ma questo è contro la supposizione, perchè il massimo comun divisore di questi due numeri si è preso minore di quest'altro preteso divisor comune; dunque il massimo comun divisore dei due numeri 2310 e 504 è pure massimo comun divisore tra il minore 504 e il resto 294 che si ha dividendo il primo per il secondo.

127. PROBLEMA. *Trovare il massimo comun divisore tra due numeri dati, ed indi tutti i divisori comuni di questi numeri.*

Siano gli stessi numeri 2310 e 504 presi qui innanzi i due numeri dati. L'operazione si esegue nel modo indicato dalla regola seguente:

Si divida il numero maggiore per il minore; indi questo minore pel resto della prima divisione; poi questo resto pel resto della seconda divisione; poi il resto secondo pel resto terzo, e così di seguito. Andando così sempre diminuendo i divisori successivi, si dovrà giungere certamente ad un'ultima divisione esatta, il divisore della quale o sarà un numero intero, o per certo l'unità. Nel primo caso quel numero intero sarà il massimo comun divisore cercato; nel secondo caso i due numeri dati, avendo per solo divisor comune l'unità, sono primi fra loro.

Ciò segue immediatamente dal teorema dimostrato nel n.° antecedente. Infatti dividendo il maggiore dei due numeri dati per il minore, se non si abbia alcun resto, il numero minore sarà il massimo comun divisore. Se poi si abbia un resto, si sa che il massimo comun divisore tra i due numeri è massimo comun divisore tra il minore di essi e il resto; dunque si dividerà il minore pel resto ed avendo ancora un resto si continuerà nello stesso modo l'operazione fino a che si perverrà ad una divisione esatta; in quest'ultima divisione il divisore è il massimo comun divisore fra sè stesso e il dividendo; ma il ragionamento fatto c'insegna

che il massimo comun divisore fra il dividendo e il divisore di ognuna di queste divisioni è sempre lo stesso; dunque l'ultimo divisore è massimo comun divisore tra il dividendo e il divisore della prima divisione, cioè tra i due numeri dati.

Si suol dare al procedimento indicato dalla regola stabilita la seguente disposizione:

	4	1	1	2	2
2310	504	294	210	84	42
294	210	84	42	00	

Nella prima linea sono i quozienti che si hanno successivamente dalle divisioni indicate dalla regola, e dei quali non si tien conto alcuno. Nella seconda si trovano i due numeri dati che sono i due primi a sinistra e poi i resti successivi, i quali, secondo ciò che si è stabilito nella regola, fanno ciascuno prima da divisore e poi da dividendo. In ultimo nella terza linea sono scritti questi resti successivi sotto i rispettivi dividendi.

128. Il massimo comun divisore di due numeri dati si può trovare, secondo che si è veduto nel n.° 125, scomponendo questi numeri nei loro fattori primi, e secondo ch' essi hanno uno o più di questi fattori di comune, quel fattor comune, o il prodotto dei vari fattor comuni sarà il massimo comun divisore cercato. È chiaro che nel primo caso il massimo comun divisore è un numero primo, nel secondo non è primo. Da ciò si può avere un criterio per conoscere se il massimo comun divisore di due numeri ottenuto col procedimento indicato nel n.° precedente sia il solo divisor comune di quei due numeri, o se ce ne abbiano anche altri; infatti segue da ciò che ora si è detto che se il massimo comun divisore ottenuto è un numero primo, esso è il solo divisor comune dei due numeri proposti; se non è primo, ve ne hanno anche altri. In quest'ultimo caso per trovare gli altri divisori comuni dei due numeri si scomporrà nel modo indicato al n.° 124 il massimo comun divisore trovato nei suoi fattori primi, e se ne troveranno tutti i divisori; questi divisori saranno manifestamente tutti i divisori comuni dei due numeri proposti. Così nell'esempio addotto essendosi trovato 42 per massimo comun divisore, tutti i divi-

sori comuni dei due numeri 3310 e 304 si troveranno coll' operazione eseguita qui appresso

		1
42	2	2
21	3	3, 6
7	7	7, 14, 21, 42.

129. Segue manifestamente da ciò che si è qui detto che *se un numero divide esattamente il massimo comun divisore di più numeri, divide pure esattamente ciascuno di questi numeri, e che reciprocamente se un numero divide esattamente vari numeri, divide anche esattamente il loro massimo comun divisore.*

130. Teorema. *Il minimo comun dividendo di più numeri è il prodotto che si ha moltiplicando fra loro tutti i fattori non comuni di tutti questi numeri, non che i comuni preso ciascuno di questi ultimi tante volte quante volte si trova nel numero ov' è ripetuto il massimo numero di volte.*

Così se si voglia trovare il minimo comun dividendo dei numeri 2100, 334, 1170, cioè il più piccolo di tutti quei numeri divisibili per ciascuno di questi tre numeri, si scomporranno questi nei loro fattori primi, e si avrà per il primo $2\times2\times3\times5\times5\times7$, per il secondo $2\times3\times5\times11$, e per il terzo $2\times3\times3\times5\times13$. Si osserverà che i fattori comuni sono 2, 3 e 5; che il primo si dovrà prendere due volte perchè tante volte si trova nel primo numero, dove è ripetuto il massimo numero di volte; il secondo 3 si dovrà prendere anche due volte perchè tante volte è ripetuto nel terzo numero ov' è preso il massimo numero di volte; lo stesso avviene dell' ultimo fattor comune 5. Si comporrà dunque il prodotto $2\times2\times3\times3\times5\times5\times11\times13$, il quale oltre i fattori comuni ai numeri dati presi tante volte quante abbiam veduto, contiene ancora gli altri 7, 11, 13 che non sono comuni; io dico che questo prodotto è il minimo comun dividendo dei tre numeri dati.

Infatti questo numero dovendo essere divisibile per ciascuno di questi tre, dev' essere un multiplo di ciascuno, cioè ognuno di essi si dovrà trovare particolarmente come fattore in quel numero; ma un numero per essere un multiplo di un altro dee conte-

nere tutti i fattori primi di quest' altro (119); dunque è chiaro che se dal prodotto composto da noi innanzi, si togliesse un fattore, non contenendo esso più particolarmente tutti i fattori primi di ciascun numero dato, non sarebbe più divisibile per ciascuno di questi. Da ciò si vede che quel prodotto è il minimo comun dividendo che si cerca.

Dal modo stabilito per trovare il minimo comun dividendo di più numeri dati si deduce che se i numeri dati siano tutti primi fra di loro, il minimo comun dividendo è uguale al loro prodotto, se non sono, è minore di questo prodotto.

131. Il minimo comun dividendo di più numeri potrebbesi anche trovare più semplicemente in altro modo; anzi questo secondo è più in uso, ed il primo non si è indicato se non per la dimostrazione del teorema stabilito, e per ispiegare la natura di esso minimo comun dividendo.

Se il numero che si cerca dev'essere divisibile per ciascuno dei numeri dati, conviene che sia un multiplo di ciascuno di essi; dunque per trovarlo si prenderà successivamente il doppio, il triplo, il quadruplo, ec. di uno dei numeri dati; il minimo comun dividendo sarà il primo di questi multipli ch'è multiplo nello stesso tempo di ciascuno dei rimanenti. Per più semplicità questi multipli si prendono del maggiore dei numeri dati.

132. È facilissimo trarre questa conseguenza da quanto si è detto sul minimo comun dividendo: *un numero che divide esattamente uno dei numeri dati, dividerà esattamente il loro minimo comun dividendo.* La reciproca però non è vera.

In ultimo farò osservare che non ci ha massimo comun dividendo fra più numeri dati; perocchè trovato il minimo comun dividendo, ogni multiplo di questo sarà pure dividendo comune di quei numeri; dal che si vede che di più numeri dati ci hanno infiniti dividendi comuni.

133. Abbiamo trattato fino qui dei numeri considerati generalmente come prodotti di più altri; diremo ora particolarmente qualcosa sulle potenze. Fisseremo innanzi tratto il numero delle cifre che può avere una potenza per rispetto a quelle della sua radice.

Il quadrato di un numero non può avere più del doppio delle cifre di questo numero, ma può averne più del doppio meno due; il cubo

non può averne più del triplo, ma può averne più del triplo meno tre; la quarta potenza non può averne più del quadruplo, ma può averne più del quadruplo meno quattro, e così di seguito.

Ciò è una conseguenza di ciò che si è detto nel n.° 72 circa il numero delle cifre di un prodotto per rispetto a quelle dei suoi fattori. Si è quivi stabilito che un prodotto di due fattori non può avere più cifre che quei due fattori insieme, ma può averne più di questo numero meno due; un prodotto di tre fattori non può averne più che quei tre fattori insieme, ma può averne più che questo numero meno tre, e così di seguito. Ora osservando che nel caso nostro i fattori sono dello stesso numero di cifre, si ricava immediatamente la proposizione stabilita.

134. Teorema. *Moltiplicando due potenze di uno stesso numero fra loro, il prodotto sarà una potenza che avrà per esponente la somma degli esponenti delle due prime, e per conseguenza dividendo una potenza di un numero per un' altra, il quoziente sarà una potenza che avrà per esponente la differenza degli esponenti delle due prime.*

Sia da moltiplicarsi 4^3 per 4^5 cioè il cubo di 4 per la sua quinta potenza; dico che il prodotto sarà 4^8, cioè quella potenza di 4 che ha per esponente la somma degli esponenti dei due fattori. Infatti 4^3 è lo stesso che $4\times4\times4$, e 4^5 è lo stesso che $4\times4\times4\times4\times4$; dunque sarà $4^3\times4^5=(4\times4\times4)\times(4\times4\times4\times4\times4)$, cioè $4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4$, secondo ciò che si è dimostrato nel n.° 102; la quale espressione indica l'ottava potenza di 8, che si scrive 4^8; dunque $4^3\times4^5=4^8$, come si voleva dimostrare.

Da ciò si vede poi che dividendo 4^8 per 4^5, si ha per quoziente 4^3, cioè che dividendo una potenza di un numero per un'altra, il quoziente sarà una potenza che avrà per esponente la differenza degli esponenti delle due prime.

Di questo teorema faremo uso con vantaggio in appresso per facilitare l' innalzamento a potenza e l' estrazione di radice.

135. Teorema. *Il quadrato di un numero che sia la somma di due altri, è uguale alla somma dei quadrati di questi altri e del doppio prodotto loro.*

Sia il numero $5+7$ la somma dei due 5 e 7; per ottenere il suo quadrato, lo si dovrà moltiplicare per sè stesso, cioè eseguire la moltiplicazione $(5+7)\times(5+7)$; ora innanzi si è avuta già occa-

sione di eseguire una moltiplicazione nella quale tanto il moltiplicando, quanto il moltiplicatore erano divisi in due parti (117), e si è veduto che il prodotto è la somma dei prodotti parziali di ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore; dunque eseguendo nello stesso modo la moltiplicazione di cui si tratta, si troverà $5^2 + 5 \times 7 + 5 \times 7 + 7^2$; ma invece di scrivere due volte il prodotto 5×7, si può scrivere $2 \times 5 \times 7$ ch'è appunto doppio del prodotto 5×7, perchè si è moltiplicato per 2 il fattore 5, (107); dunque si avrà finalmente $(5 + 7)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 7 + 7^2$; espressione che indica appunto il teorema enunciato.

136. COROLLARIO. *Secondo che un numero è doppio, triplo, quadruplo ec. di un altro, il suo quadrato è quattro volte, nove volte, sedici volte, ec. maggiore del quadrato di quest'altro, o in altri termini, secondo che un numero contiene un altro 2, 3, 4, 5... volte, il suo quadrato conterrà il quadrato di questo tante volte quante unità sono nei quadrati di questi numeri, cioè 4, 9, 16, 25... volte.*

Sia il numero 14 doppio del numero 7; dico che si avrà $14^2 = 4 \times 7^2$, cioè che il quadrato di 14 è quadruplo del quadrato di 7. Infatti si faccia, per mezzo del teorema dimostrato or ora, il quadrato di $7 + 7$ ch'è uguale a 14; si avrà $(7+7)^2 = 7^2 + 2 \times 7^2 + 7^2$; il secondo membro di questa uguaglianza è la somma di quattro quadrati di 7, cioè è 4×7^2; dunque $14^2 = 4 \times 7^2$.

In secondo luogo sia 21 triplo di 7; dico che si avrà $21^2 = 9 \times 7^2$. Si faccia, come prima, il quadrato di $2 \times 7 + 7$ ch'è uguale a 21; per quello che si è veduto or ora, il quadrato della prima parte 2×7 è 4×7^2; dunque si avrà $(2 \times 7 + 7) = 4 \times 7^2 + 4 \times 7^2 + 7^2$; il secondo membro contiene nove quadrati di 7; dunque $21^2 = 9 \times 7^2$.

Con un ragionamento simile si dimostrerà che se 28, 35, ec. sono quadrupli, quintupli, ec. di 7, si avrà $28^2 = 16 \times 7^2$, $35^2 = 25 \times 7^2$, ec.

Noi abbiamo messa questa proposizione come corollario del teorema dimostrato nel n.° precedente, a fine che si vegga ch'ella n'è un caso particolare, ma la si potrebbe anche dimostrare indipendentemente da questo teorema. Infatti, nel primo caso il quadrato di 14, ovvero di 1×7 è $2 \times 7 \times 2 \times 7$; scambiando l'ordine de'

fattori, si può scrivere $2 \times 2 \times 7 \times 7$, la quale espressione è la stessa che 4×7^2; dunque $14^2 = 4 \times 7^2$. Con un ragionamento analogo si troverà $21^2 = 9 \times 7^2$, $28^2 = 16 \times 7^2$, ec.

137. Teorema. *Il quadrato di un numero che sia la differenza di due altri, è uguale alla somma dei quadrati di questi altri, meno il doppio prodotto loro.*

Dei numeri 7 e 5 si prenda la differenza 7—5; dico che si avrà $(7-5)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times 5 + 5^2$.

Infatti, si esegua la moltiplicazione $(7-5) \times (7-5)$; si dirà: moltiplicare una quantità per $7-5$, cioè per 2 è lo stesso che moltiplicarla prima per 7 e poi per 5, e togliere il secondo prodotto dal primo. Dunque noi moltiplicheremo prima il moltiplicando 7—5 per 7; si scambi l'ordine dei fattori, e così si dovrà eseguire la moltiplicazione $7 \times (7-5)$, la quale, per quello che abbiam detto, dà $7^2 - 7 \times 5$. In secondo luogo moltiplicheremo il moltiplicando 7—5 per 5, e scambiando pure l'ordine dei fattori, si avrà parimente $5 \times (7-5) = 7 \times 5 - 5^2$. Dovendo ora togliere il valore di questo secondo prodotto da quello del primo, noi ragioneremo così: se scrivessimo $7^2 - 7 \times 5 - 7 \times 5$, cioè se togliessimo dal valore del primo prodotto non $7 \times 5 - 5^2$, come si doveva, ma 7×5 che supera $7 \times 5 - 5^2$ di 5^2, per quello che si è detto nel n.° 34, avendo aumentato il sottrattore della quantità 5^2, il residuo si è diminuito di questa quantità, cioè $7^2 - 7 \times 5 - 7 \times 5$ manca dal vero valore cercato di 5^2; dunque aggiungendo 5^2 a questa quantità si avrà il valore cercato, che sarà $7^2 - 7 \times 5 - 7 \times 5 + 5^2$. Finalmente invece di togliere due volte 7×5 da questa quantità, togliendone una sola volta $2 \times 7 \times 5$, ch' è doppio di 7×5, si avrà, come si voleva dimostrare, $(7-5)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times 5 + 5^2$.

138. Teorema. *Il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è uguale alla differenza dei quadrati di questi numeri.*

Siano i due numeri 7 e 5; si moltiplichi la somma $7+5$ per la differenza $7-5$; dico che si avrà $(7+5) \times (7-5) = 7^2 - 5^2$.

Si esegua la moltiplicazione indicata nel primo membro. Secondo che si è veduto nel n.° precedente, si dovrà moltiplicare il primo fattore $7+5$ prima per 7, poi per 5, ed indi si dee togliere il secondo prodotto dal primo; si avrà dunque $(7+5) \times 7 = 7^2 + 5 \times 7$; indi $(7+), 5 \times 5 = 5 \times 7 + 5^2$. Ora togliendo

il secondo dei valori trovati dal primo, si ha $7^2 + 5 \times 7 - 5 \times 7 - 5^2$, nella quale espressione il prodotto 5×7 si trova una volta aggiunto, una volta sottratto; dal che si vede che queste due operazioni si distruggono scambievolmente, e però quella espressione riducesi a $7^2 - 5^2$; dunque finalmente $(7+5) \times (7-5) = 7^2 - 5^2$.[1]

139. Teorema. *Il cubo di un numero che sia la somma di due altri, è uguale al cubo della prima parte, più il cubo della seconda parte, più il triplo prodotto del quadrato della prima per la seconda, più il triplo prodotto della prima pel quadrato della seconda.*

Sia $7+5$ il numero di cui si tratta; dico che si avrà $(7+5)^3 = 7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3$.

È chiaro che moltiplicando un numero per il suo quadrato, si otterrà il cubo di questo numero. Ora il quadrato di $7+5$, secondo il teorema del n°. 135, è $7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$; dunque per avere il cubo di $7+5$, si dee moltiplicare $7+5$ per quella quantità. L'operazione si disporrà nel modo che segue.

$$\begin{array}{c} 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2 \\ 7+5 \\ \hline 7^3 + 2 \times 7^2 \times 5 + 7 \times 5^2 + 7^2 \times 5 + 2 \times 7 \times 5^2 + 5^3 \end{array}$$

Si sa già, per l'occasione che si è avuta innanzi di una tale moltiplicazione, che il prodotto è la somma di tutti i prodotti parziali di ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore. Si moltiplicherà dunque la prima parte 7 del moltiplicatore per la prima parte 7^2 del moltiplicando, e si avrà così 7^3 per prima parte del prodotto. Indi si moltiplicherà ancora 7 per la seconda parte del moltiplicando cioè per $2 \times 7 \times 5$, per far ciò basta moltiplicare per 7 uno dei fattori di questo prodotto (107); moltiplicheremo il fattore 7, ed avremo $2 \times 7^2 \times 5$

[1] Di questi tre ultimi teoremi solamente il primo è di pura necessità nell'aritmetica, perocchè se ne ricava il procedimento per l'estrazione della radice quadrata; tuttavia non abbiam voluto omettere gli altri due per due rispetti: il primo, che questi tre teoremi sogliono andare sempre insieme, il secondo, che se il lettore si trova studiare contemporaneamente la geometria, comprenda viemeglio i tre teoremi geometrici corrispondenti ai tre di cui è parola.

per seconda parte del prodotto. In ultimo moltiplicando 7 per l'ultima parte 5^2 del moltiplicando si ha 7×5^2.

Passando alla seconda parte 5 del moltiplicatore, la si moltiplicherà per le tre parti del moltiplicando, ed avvertendo nella seconda parte di moltiplicare il fattore 5, si otterranno le rimanenti parti del prodotto $7^2 \times 5$, $2 \times 7 \times 5^2$, 5^3.

Ora nel prodotto trovato si osservi che le due parti $2 \times 7^2 \times 5$ e $7^2 \times 5$ formano il triplo prodotto di 7^2 per 5, cioè $3 \times 7^2 \times 5$; parimente le due parti $2 \times 7 \times 5^2$ e 7×5^2 formano il triplo prodotto di 7 moltiplicato per 5^2, ovvero $3 \times 7 \times 5^2$; dunque avremo finalmente $(7+5)^3 = 7^3 + 3 \times 7^2 \times 5 + 3 \times 7 \times 5^2 + 5^3$.

Questo teorema e quello del n°. 135, dei quali il primo tratta del cubo di $7+5$, il secondo del suo quadrato, ci serviranno per l'estrazione della radice quadrata e della radice cubica dai numeri interi, e però bisognerà tenerli bene a mente. Se volessimo estrarre la radice quarta, la quinta, ec., dovremmo dimostrare alcuni altri teoremi analoghi ai due qui esposti, per esempio, a che è uguale $(7+5)^4$, $(7+5)^5$, ec.; questo potrebbesi fare moltiplicando $7+5$ per il suo cubo trovato, in un modo simile a quello tenuto per moltiplicarlo per il suo quadrato; poi moltiplicando $7+5$ per la sua quarta potenza e così di seguito. Ma di tali altri teoremi non si suol far parola nell'aritmetica, perchè bisognerebbe gravare la memoria di tanti fatti particolari, senza che potesse scorgersi una legge generale che seguono tali potenze; legge che si dimostra agevolmente in algebra e ch'è dovuta al Newton. Ed è però che nell'aritmetica si tratta solamente dell'estrazione della radice quadrata, e della radice cubica.

140. Teorema. *Il prodotto di più numeri interi, la cui somma sia uguale ad un numero dato, divien* massimo *quando tutti questi numeri siano uguali fra loro; quindi secondo ch'essi siano due, tre, quattro, ec., il prodotto massimo è il quadrato della metà, della terza parte, della quarta parte, ec., del numero dato. Questo stesso prodotto divien* minimo *quando tutti quei numeri, meno un solo, siano uguali all'unità: e però secondo ch' essi siano due, tre, quattro, ec., il prodotto minimo è uguale al numero dato meno 1, meno 2, meno 3, ec.*

Quest'ultimo teorema sui prodotti meritava di non essere tra-

lasciato, si perchè è notevolissimo da sè stesso, e si perchè avvezza di buon'ora la mente a questa considerazione di alcune quantità che hanno il massimo o minimo valore fra tutte le altre della medesima specie. Se il lettore è iniziato nello studio della geometria elementare, ha potuto averne anche quivi alcuni esempi; così la perpendicolare è la minima di tutte le rette che ponno condursi da un punto che sia fuori di una linea retta su questa retta; il diametro è la massima di tutte le linee rette che posso-no iscriversi in un cerchio, e così tanti altri; tacendo delle figure isoperimetre le quali offrono i più notevoli esempi di massimi e minimi, ma la cui teorica suole essere tralasciata in un primo studio di geometria.

Per dimostrare il nostro teorema, incominciamo dal caso in cui i fattori siano due; debba essere la loro somma uguale a 10. Siano essi disuguali, per esempio, 7 e 3; è chiaro ch' essendo 10 la loro somma, di quanto 7 supera 5 ch'è la metà di 10, di tanto 3 ne manca; onde invece di 7 potremo scrivere $5+2$ ed inve di 3 $5-2$; così avremo $7\times3=(5+2)\times(5-2)$, dei quali prodotti quello indicato nel secondo membro, secondo il teorema del n.° 138, è 5^2-2^2. Dunque il prodotto di due numeri è uguale al quadrato della metà della loro somma, meno il quadrato della loro differenza da questa metà; onde si vede che a misura che questa differenza diminuisca, cioè che i due fattori si avvicinino ad essere uguali, il valore del loro prodotto divien più grande; dunque questo prodotto diverrà massimo quando i due fattori saranno uguali fra loro, cioè quando questo prodotto sarà uguale al quadrato della metà del numero dato.

Passiamo al caso in cui il prodotto sia minimo. Si è veduto che quanto più diminuisce la differenza dei due fattori, più il loro prodotto aumenta; dunque al contrario quanto più aumenta questa differenza, più il prodotto diminuisce; ora è chiaro che dovendo essere i due fattori, per la supposizione, interi, la massima differenza loro è quando uno di essi è l'unità; così nel nostro esempio 1 e 9 sono i due fattori che hanno la massima differenza, dunque il prodotto è minimo quando uno dei fattori è l'unità; nel qual caso il prodotto, come si vede, è uguale al numero dato meno l'unità.

Consideriamo ora il caso di un numero qualunque di fattori; sia 17 la loro somma e siano 3, 5, 7, 2 i fattori; nel prodotto $3 \times 5 \times 7 \times 2$ si considerino i due fattori 3 e 5 la cui somma è 8; è chiaro che se al loro prodotto 3×5 si sostituisce l'altro 4×4 nel prodotto totale, il prodotto $4 \times 4 \times 7 \times 2$ avrà pure la somma dei suoi fattori uguale al numero dato 17, ma intanto sarà maggiore del primo $3 \times 5 \times 7 \times 2$, perchè 4×4, per quello che si è veduto innanzi, è maggiore di 3×5; quello che si è detto di questi due fattori si può dire di due altri qualunque; dunque per essere massimo il prodotto, i suoi fattori a due a due, comunque presi, debbono essere uguali, cioè debbono essere tutti uguali fra loro.

Per vedere in secondo luogo quando il prodotto è minimo, in luogo di 3×5 sostituiremo 1×7; il prodotto $1 \times 7 \times 7 \times 2$ avrà pure la somma dei suoi fattori uguale al numero dato 17, intanto sarà minore di $3 \times 5 \times 7 \times 2$; dunque è chiaro che per essere minimo il prodotto, presi comunque due fattori, almeno uno di essi dev' essere l' unità; per avvenir ciò è necessario che un solo tra tutti i fattori sia quello che non è l' unità; perchè se ve ne fosser due, considerando questi due, non si avrebbe, come richiedesi, uno di essi uguale all' unità; dunque per essere il prodotto minimo, fa d'uopo che tutti i fattori, meno un solo, siano uguali all' unità. È manifesto che in questo caso il prodotto è uguale a questo fattore che non è l' unità, ovvero al numero dato meno 1, 2, 3 ec., secondo che il numero dei fattori è 2, 3, 4 ec.

Si comprende da questo teorema come qualora parlasi nelle matematiche di quantità massime o minime, queste non sono tali assolutamente, ma solo per rispetto ad alcune altre comprese fra dati limiti; ed infatti è manifesto che non ci ha nelle quantità grandezza o piccolezza assoluta.

Caratteri che si richieggono in un numero perchè sia divisibile per 2, 3, 5, 7, 11 — Conseguenze che se ne deducono.

141. Nel procedimento indicato al n.° 124 per trovare tutti i divisori di un numero dato, allorchè si cercano da prima i fattori primi del numero proposto, nel dividere i quozienti successivi

pei numeri primi, devesi tentare se siano possibili le diverse divisioni, ma non si ha un criterio per conoscere *a priori* se il dividendo parziale che si considera sia divisibile o no pel numero primo che si sta provando. Ora è da sapere che per essere un numero divisibile per un numero primo, è necessario che abbia in sè un certo carattere particolare, dal quale si può subito argomentare la divisibilità per quel numero primo. Questi caratteri sono differenti per ciascun numero primo; laonde sarebbe un volere immergerci in un campo infinito, se togliessimo ad esporre tutti i vari caratteri che si richieggono in un numero, perch'esso sia divisibile per ciascun numero primo; oltre che a misura che ci avanzeremmo in questa disamina, le dimostrazioni crescerebbero sempre in difficoltà. Indicheremo dunque solamente quali sono i caratteri che si richieggono in un numero perchè esso sia divisibile pei numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, lasciando all'algebra l'esposizione degli altri casi.

Da tali caratteri ne verremo poscia deducendo alcuni altri, per alcuni multipli di questi numeri primi.

142. *Divisore* 2. Un numero che sia divisibile per 2, si dice *pari*, perchè, com' è chiaro, è sempre la somma di due numeri uguali; un numero non divisibile per 2 si dice *impari o caffo*. Ora *un numero è divisibile per 2 quando è terminato da una cifra pari o da zero*; (noi diciamo per brevità *cifra pari* intendendo un numero semplice pari): le cifre pari sono, come si vede, 2, 4, 6, 8.

È chiaro primamente che 10 è divisibile per 2, perchè $10=2\times5$; ora un numero terminato da zero è un multiplo di 10, e se un numero è divisibile per un altro, ogni suo multiplo sarà divisibile per quest'altro (104); dunque ogni numero terminato da zero è divisibile per 2.

Supponiamo ora che un numero sia terminato da una delle cifre pari 2, 4, 6, 8; dico che un tal numero sarà divisibile per 2. Prendiamo il numero 2376; distinguendo le decine dalle unità, questo numero si può scrivere $2370+6$; la prima parte, sendo terminata da zero, è divisibile per 2, la seconda è pure divisibile per 2, perocchè, per ipotesi è un numero semplice pari; dunque il tutto 2376 è divisibile per 2. Nello stesso modo si ragionerebbe se il numero fosse terminato da un' altra cifra pari diversa da 6;

dunque rimane dimostrato che ogni numero terminato da zero o da cifra pari è divisibile per 2.

La reciproca è pur vera, cioè *ogni numero pari dev' essere terminato da zero o da cifra pari, o che vale lo stesso, i soli numeri terminati da zero o da cifra pari sono divisibili per 2.* Infatti, se l' ultima cifra non fosse o zero o una cifra pari, la conclusione avuta or ora non potrebbe avere più luogo.

143. Adunque, qualora un numero sia terminato da una delle rimanenti cifre 1, 3, 5, 7, 9, non sarà divisibile per 2, cioè sarà impari. Ora ogni numero terminato da una di queste cifre si può considerare come un numero terminato da zero o da cifra pari, più uno; dunque un numero impari non è che un numero pari più uno. Laonde nella serie dei numeri interi, siccome appunto ciascun numero differisce dal seguente per l' unità, si ha sempre di due numeri consecutivi uno pari, l' altro impari.

È chiaro da ciò che il resto che si ha dividendo un numero impari per 2, è sempre l' unità.

144. *Il prodotto di un numero qualunque per un numero pari è sempre un numero pari.* Infatti essendo un fattore divisibile per 2, tale dev' essere ancora il prodotto. Al contrario, *il prodotto di due numeri impari è sempre un numero impari.* Imperocchè, siccome ciascun fattore non è divisibile per 2, così nè anche il prodotto sarà divisibile per 2 (117).

145. I caratteri di divisibilità per 4, 8, 16, ec., cioè per le potenze di 2 hanno un' analogia perfetta con quello che si è stabilito per esso numero 2.

Un numero è divisibile per 4, 8, 16, ec., secondo che le due, le tre, le quattro, ec. ultime cifre a destra rappresentino un numero divisibile per 4, 8, 16, ec.

La dimostrazione sarà manifesta, osservando che 100 è divisibile per 4, 1000 per 8, 10000 per 16, ec.; dividendo un numero in centinaia ed unità, in migliaia ed unità, in decine di migliaia ed unità ec., il teorema sarà palese, come pel divisore 2.

146. *Divisore* 3. Si osservi da prima che tutte le potenze di 10, cioè tutti i numeri espressi dall' unità seguita da un numero qualunque di zeri, divisi per 3, dànno per resto 1, perchè $10=3\times 3+1$, $100=33\times 3+1$, $1000=333\times 3+1$, ec. Per conseguenza una

cifra qualunque seguita da quanti zeri si voglia, darà un numero che diviso per 3, lascerà per resto questa stessa cifra; infatti $20=2\times10=2\times3\times3+2$, $200=2\times100=2\times33\times3+2$, ec., $30=3\times10=3\times3\times3+3$, $300=3\times33\times3+3$, ec., e così di seguito.

Ora consideriamo un numero qualunque 3762; questo è lo stesso che $3000+700+60+2$; la prima parte 3000, per quello che si è veduto or ora, divisa per 3 dà per resto 3, la seconda dà per resto 7, la terza 6, la quarta 2; tutti questi resti formano il numero $3+7+6+2=18$; dal che si vede che *se da un numero si toglie la somma delle sue cifre significative considerate come rappresentanti unità semplici, il residuo sarà divisibile per 3.* Così dunque possiamo considerare ogni numero diviso in due parti, delle quali la seconda sia la somma delle sue cifre significative rappresentanti unità semplici, la prima parte è, come abbiam veduto, divisibile per 3; dunque il resto che si ha dividendo il numero proposto per 3 è lo stesso di quello che si ha dividendo per 3 la seconda parte. Laonde *il resto che si ha dividendo un numero qualunque per 3 è lo stesso di quello che si ha dividendo per 3 la somma delle sue cifre significative considerate come rappresentanti unità semplici.* Dunque *se questa somma è divisibile per 3, il numero sarà parimente divisibile per 3.* Così nell'esempio addotto 3762, si ha la somma delle cifre significative $3+7+6+2=18$ ch'è un multiplo di 3; dunque il numero 3762 è divisibile per 3.

147. *Un numero è divisibile per 9 quando la somma delle sue cifre significative considerate come rappresentanti unità semplici è un multiplo di 9.*

Osservando che del numero 9 avviene lo stesso che di 3, cioè ch'ogni potenza di 10 divisa per 9, dà per resto l'unità, il ragionamento procederà come pel numero 3.

Si osservi che ogni numero divisibile per 9 è necessariamente divisibile per 3, perchè $9=3\times3$, e dividere per 9 è lo stesso che dividere due volte successivamente per 3.

148. *Divisore* 5. Essendo 10 divisibile per 5, perchè uguale a 2×5, ogni numero terminato da zero, come multiplo di 10, sarà pure divisibile per 5. Ora si divida un numero non terminato da zero, in decine ed unità; la prima parte, essendo terminata da

zero, sarà divisibile per 5; dunque per essere tutto il numero divisibile per 5, conviene che l'altra parte, ch'è un numero semplice sia divisibile per 5; ora il solo 5 tra i numeri semplici è divisibile per 5; dunque *i soli numeri terminati da zero* o *da 5 sono divisibili per 5.*

149. *Un numero è divisibile per 25, per 125, ec., cioè per le successive potenze di 5, secondo che le due, le tre, ec. ultime cifre a sinistra formano un numero divisibile per 25, per 125, ec.*

La dimostrazione è analoga a quella fatta pel divisore 5, dividendo un numero in centinaia ed unità, in migliaia ed unità, ec. ed osservando che 100 è divisibile per 25, 1000 per 125, ec.

150. *Divisore* 7. Vediamo da prima quali sono i resti che si hanno dividendo per 7 i termini della serie indefinita 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, ec. Questi resti non possono essere tutti differenti l'un dall'altro, perchè dovendo essere tutti minori del divisore 7, non ponno essere diversi da uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ora 10 diviso per 7 dà per resto 3; 10^2 dà quello che si ha dal prodotto dei resti dei suoi fattori 10 e 10 (121), cioè $9-7=2$; 10^3 dà similmente $2\times3=6$; 10^4 dà $6\times3-14=4$; 10^5 dà $4\times3-7=5$; 10^6 dà $5\times3-14=1$; ora si vede, che avendo ottenuto 1, le moltiplicazioni dei resti dovendo essere le medesime, dànno successivamente gli stessi resti 1, 3, 2, 6, 4, 5, e collo stesso ordine; questi sei numeri semplici detti innanzi, formano, come suol dirsi, un *periodo*, che si ripeterà sempre, percorrendo successivamente tutte le potenze di 10. Dunque se la potenza 10^2 ha dato il resto 2, è chiaro che, percorse sei altre potenze consecutive, la potenza 10^8 alla quale si perverrà, darà il medesimo resto 2. Di qui segue che 10^8-10^2 è un multiplo di 7, cioè generalmente la differenza di due potenze di 10, i cui esponenti differiscano di 6, è un multiplo di 7; infatti si è veduto che queste due potenze dànno lo stesso resto; dunque sottraendo l'una dall'altra, i due resti si distruggono e rimane solamente la differenza di due multipli di 7; adunque 7 divide questa differenza (105). Ora si osservi che l'esempio addotto 10^8-10^2 si può scrivere $10^2\times(10^6-1)$, perchè eseguendo la moltiplicazione indicata, si ha nuovamente la prima espressione; ora dovendo essere questo prodotto divisibile per 7, e non essendo divisibile per 7 il fattore 10^2, l'altro 10^6-1 dev'essere divisibile

per 7 (117), cioè $10^6 : 7$ dee dare per resto 1. Ogni altro divisore diverso da 7, ma primo con 10 condurrebbe alla stessa conseguenza, onde generalmente *quale che siasi il numero primo con 10, per il quale si dividono i termini della serie indefinita 1, 10, 10^2, 10^3....., i resti successivi formeranno un periodo, i cui termini saranno in minor numero che le unità di questo divisore, cominciando sempre il periodo dal primo resto 1.*

Sia ora un numero qualunque 25718; lo si scomponga in $8 + 10 + 700 + 5000 + 20000$; i resti che dànno queste varie parti, divise per 7 sono i prodotti delle rispettive cifre del periodo per 8, 1, 7, 5 e 2. Scriveremo adunque le cifre del periodo in senso inverso sotto le rispettive cifre del numero proposto, e moltiplicheremo ciascuna cifra per la inferiore, come si vede qui sotto;

$$\begin{array}{r}
25\ 718 \\
46\ 231 \\
\hline
1.8 = 8 \\
3.1 = 3 \\
2.7 = 14 \\
6.5 = 30 \\
4.2 = 8 \\
\hline
\text{Somma} = 63
\end{array}$$

la somma 63 di questi prodotti, divisa per 7, darà lo stesso resto che il numero proposto; dunque se questa somma è divisibile per 7, tale sarà pure quel numero; nel nostro esempio si trova appunto 63 nonuplo di 7, e però si può essere sicuri che il numero 25 718 è divisibile per 7.

151. Osservazione. Qualora il numero proposto contenesse molte cifre, quei prodotti darebbero una somma più alta, e forse non sarebbe facile vedere s'ella è o no un multiplo di 7. Si suole perciò anche procedere in un altro modo, col quale si ottiene un numero più piccolo. Nelle divisioni dei termini della serie 1, 10, 10^2, 10^3... per 7, in vece di considerare i quozienti per difetto, si possono considerar quelli per eccesso; consideriamoli tali nei soli termini 10^4, 10^5, 10^6, cioè invece di fare $10^4 = 7 \times 1428 + 4$,

facciamo $10^4 = 7 \times 1429 - 3$, e così per le altre due potenze 10^5, 10^6; dunque nel periodo 1, 3, 2, 6, 4, 5 ai tre ultimi numeri si ponno sostituire i loro *supplementi* a 7, cioè 1, 3, 2 che sono i resti *sottrattivi* che si hanno, considerando i quozienti per eccesso. In questo modo il periodo si riduce alle sole cifre 1, 2, 3; ma i prodotti però debbono essere considerati una volta come additivi, una volta come sottrattivi. Dividendo dunque il numero in classi di tre cifre, e scritte sotto di ciascuna classe le tre cifre del periodo, i prodotti che si hanno nelle classi di posto impari si considereranno come additivi, in quelle di posto pari come sottrattivi; per indicare la qual cosa sulle cifre del periodo che dànno prodotti sottrattivi abbiamo sovrapposto una lineetta; ecco il quadro delle operazioni.

25	718	
$\overline{31}$	231	
1. 5=5	1. 8=8	
3. 2=6	3. 1=3	25—11=14
	2. 7=14	
Som.=11	Som.=25	

Nella prima classe si è avuto 25 per somma, nella seconda 11; la differenza delle due somme è 25—11=14; 14 è divisibile per 7; dunque il numero proposto è pur esso divisibile per 7.

152. *Divisore* 11. Si dividano, come prima, i termini della serie indefinita 1, 10, 10^2... per 11; il periodo sarà 1, 10, e sostituendo a 10 il suo supplemento ad 11, ch'è 1, il periodo si ridurrà alla sola cifra 1, che dovrà esser considerata una volta come additiva, una volta come sottrattiva. Di qui s'inferisce che *il resto della divisione di un numero per 11 è il resto che si ha togliendo la somma delle sue cifre di posto pari, da quella delle cifre di posto impari; dunque se questo resto è zero, il numero è divisibile per 11.*

Se mai dalla prima somma non si possa sottrarre la seconda, si aggiungerà al sottrattore un multiplo di 11, in modo che la sottrazione possa eseguirsi.

Ancora potrebbesi operare nel modo che segue: siccome 100:11

dà per resto 1, così pure 1 daranno 100^2, 100^3... Ora sia un numero 34617; lo si potrà scrivere così $17.\ 1+46.\ 100+3.\ 10000$; dividendo ciascuna parte per 11, i resti saranno 17, 46 e 3; dunque $17+46+3$, cioè 66, diviso per 11, darà il medesimo residuo che il numero proposto; ma $66=5\times11$; dunque il numero proposto è divisibile per 11. Laonde *dividendo un numero in gruppi di due cifre ciascuno, cominciando dalla destra, la somma dei numeri rappresentati da tali gruppi, divisa per 11 dà il medesimo resto che quel numero, e però se questa somma è un multiplo di 11, quel numero sarà divisibile per 11.*

153. In ultimo da quanto si è fin qui detto non si vuol tralasciare di trarre alcune conseguenze semplicissime.

1.° *Un numero è divisibile per 6, o per 18, allorchè, sendo pari, la somma delle sue cifre significative sia un multiplo di 3, o di 9.*

Infatti questo numero è così divisibile per 2 e per 3, o per 9; ma 2 e 3, o 2 e 9 sono numeri primi fra loro; dunque (119) il numero è divisibile per $2\times3=6$, o per $2\times9=18$.

2.° *Un numero è divisibile per 12 o per 36, quando le due ultime cifre a destra rappresentino insieme un numero divisibile per 4, e la somma delle cifre significative sia un multiplo di 3 o di 9.*

Perocchè, essendo il numero divisibile per 4 e per 3, o per 9, sarà divisibile per $4\times3=12$, o per $4\times9=36$.

3.° *Un numero è divisibile per 15 o per 45, quando sia terminato da zero o da 5, e la somma delle sue cifre significative sia un multiplo di 3 o di 9.*

Allora infatti il numero è divisibile per 5 e per 3, o per 9; dunque sarà divisibile per $3\times5=15$, o per $9\times5=45$.

4.° *Un numero è divisibile per 22, 33, 44, 55, 66, 77, quando avverandosi le condizioni della divisibilità per 11, cioè essendo zero la differenza della somma delle cifre di posto pari da quelle di posto impari, si avverino insieme quelle della divisibilità per 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

5.° *Un numero è divisibile per 14, 21, 28, 35, 42, quando avverandosi le condizioni della divisibilità per 7, si avverino insieme quelle della divisibilità per 2, 3, 4, 5, 6.*

Nella serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4..., il prodotto di due numeri consecutivi è sempre divisibile per 2; il prodotto di tre numeri consecutivi è sempre divisibile per 2×3, e così di segui-

to. In fatti, 1° il prodotto di due numeri interi consecutivi è divisibile per 2, perchè uno dei fattori è sempre pari; 2° il prodotto di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 2×3, poichè questo prodotto è divisibile per 2, (1°) e la divisione del maggior fattore per 3 non potendo dare che uno dei resti 0, 1, 2, segue che uno dei fattori è un multiplo di 3; 3° il prodotto di quattro numeri interi consecutivi è divisibile per 2×3×4, perchè questo prodotto è divisibile per 3, (2°) e la divisione del maggior fattore per 4 non può dare che uno dei resti 0, 1, 2, 3, onde di due dei quattro fattori uno è divisibile per 2 ed un altro per 4. Di ragionamenti analoghi farebbesi uso per un qualunque numero di fattori.

Ripruove per 9 e per 11 della moltiplicazione e della divisione.

154. Abbiamo accennato nel n.° 98 di un nuovo modo di praticare la ripruova della moltiplicazione e della divisione più semplice e spedito di quelli colà veduti; ora qui appunto è il luogo di far parola di coteste maniere di ripruova, perocchè elle ricavansi dalle proprietà stabilite qui innanzi dei numeri 9 e 11.

La regola della ripruova per 9 nella moltiplicazione è la seguente:

Si faccia la somma delle cifre significative di ciascun fattore, considerate come rappresentanti unità semplici, e se ne tolga il 9 quante volte vi è contenuto; si moltiplichino i due resti ottenuti, e del loro prodotto si trovi, come s' è fatto innanzi, il resto della divisione per 9. In ultimo si faccia la somma delle cifre significative del prodotto della moltiplicazione, e se ne sottragga il 9 quante volte si può; si otterrà così un resto che, se l' operazione è stata ben fatta, dev' essere uguale al primo.

Infatti si sa da una parte che i resti ottenuti da ciascun numero sono i resti della divisione per 9; da altra parte si sa (411) che il resto della divisione di un prodotto è lo stesso che quello che dà il prodotto dei resti dei due fattori.

155. Passando alla divisione, quando non ci abbia resto, il procedimento è chiarissimo, ricordandosi che il dividendo è il pro-

dotto del divisore pel quoziente; quando ci abbia un resto, lo si toglierà prima dal dividendo, e si tornerà così nello stesso caso.

156. In egual modo si opererà per la ripruova per 11, solo però sarà diversa la maniera di trovare i resti della divisione per 11, nel che si dovrà procedere come nel n.° 152.

Non si vuol tralasciare di avvertire che queste due ripruove quel vantaggio che hanno per la facilità e la speditezza maggiore, lo perdono, potendo, benchè di rado, fallire. In quanto alla ripruova del 9, gli errori possono aver luogo per due ragioni principali, 1° perchè o in uno dei fattori, o nel prodotto è potuto avvenire di scrivere zero, in cambio di 9, 2° perchè due cifre han potuto essere una troppo alta, l'altra troppo piccola dello stesso numero di unità; il che ha potuto produrre nell'addizione delle cifre del prodotto una compensazione, e così non potremmo avvederci dell'errore.

È da sapere anche che in quanto alla ripruova per 11, gli errori sono molto più rari.

CAPITOLO IV.

FRAZIONI ORDINARIE E FRAZIONI CONTINUE.

Proprietà fondamentali delle frazioni.

157. Nel capitolo precedente si è trattato delle prime quattro operazioni del calcolo aritmetico sui numeri interi; il simile si farà nel presente capitolo per le frazioni. Ma è da far parola innanzi tratto di alcune proprietà fondamentali di esse frazioni, sulle quali si appoggerà intieramente tutto quanto saremo per dire in progresso sul loro calcolo.

In quanto alla definizione della parola *frazione*, essa può immediatamente dedursi dall'idea che ce ne siamo già formata innanzi, là dove abbiam fatto parola della formazione dei numeri. *Si chiama frazione quel numero che contiene una o più volte una stessa parte aliquota dell'unità*. Ancora è da ricordarsi la distinzione che abbiamo fatta delle frazioni in *vere* e *spurie*: una frazione è vera quando è minore dell'unità, spuria quando è maggiore, o che torna lo stesso, è vera quando il numeratore è minore del denominatore, spuria quando n'è maggiore, dando alle parole *numeratore* e *denominatore* la significazione assegnata già loro innanzi, cioè che il denominatore è il numero che indica in quante parti uguali l'unità è stata divisa, il numeratore è il numero che esprime quante di queste parti contiene la frazione.

Si è pure veduto nel n.° 41 che *una frazione è il quoziente del numeratore diviso pel denominatore*. Così può dirsi che la frazione $\frac{3}{7}$ rappresenta tre settime parti dell'unità, o pure ch'è il quo-

ziente di 3 diviso per 7, cioè la settima parte di 3; queste espressioni sono equivalenti.

Allorquando la frazione è spuria, la sua espressione, come pure si è avuto occasione di vedere innanzi, può essere cangiata in quella di un intero più una frazione vera; l'operazione con cui si fa questo, suol dirsi *cavare gl' interi* dalla frazione spuria. Così per cavare gl' interi dalla frazione spuria $\frac{38}{5}$ si dirà: questa frazione è il quoziente di 38 diviso per 5; ora siccome il dividendo è maggiore del divisore, la divisione può eseguirsi, e dà $7\frac{3}{5}$; dunque $\frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$. Laonde rimane stabilito che *per cavare gl' interi da una frazione spuria, si eseguirà la divisione del numeratore per il denominatore; il quoziente particolare esprimerà le unità contenute dalla frazione spuria, e il quoziente completo sarà uguale a questa frazione.*

Viceversa, se sia data l'espressione $7\frac{3}{5}$, cioè un intero più una frazione, e si volesse trovare la frazione spuria $\frac{38}{5}$ equivalente, il che si dice *ridurre intero e fratto ad un sol fratto*, si osserverà che il denominatore sì della frazione spuria, e sì della vera è lo stesso, cioè 5, e che il numeratore 38 della frazione spuria è il dividendo, 5 il divisore, 7 il quoziente, e 3 il resto; onde $38=7\times5+3$; dunque *per ridurre intero e fratto ad un sol fratto, si moltiplicherà l' intero pel denominatore del fratto e si aggiungerà al prodotto il numeratore; indi si formerà una frazione spuria che abbia questo numero per numeratore e per denominatore il denominatore della frazione vera.*

158. *Aumentando o diminuendo di un numero intero il solo numeratore di una frazione, il valore di questa frazione viene aumentato o diminuito di tante di quelle parti aliquote dell' unità rappresentate da essa frazione, quante sono le unità dell' intero aggiunto, o sottratto.*

Infatti quando s' enuncia una frazione, altro non fassi ch' esprimere col numeratore un' aggregato di unità; soggiungendovi poi il denominatore, si esprime che l'unità di cui si tratta non è quella stabilita per comun termine di paragone, ma sì una certa par-

te aliquota di questa; onde la differenza tra un numero intero ed un fratto sta in questo, che il nome dell'unità è diverso, e così, siccome aggiungendo ad un numero intero un altro, il primo si aumenta di tutte le unità del secondo, e diminuendolo di questo numero intero, si diminuisce di tutte le unità di esso, così aumentando o diminuendo di un numero intero il numeratore di una frazione, essendo qui l'unità una certa parte aliquota indicata dal denominatore, la frazione si aumenterà o si diminuirà di tante volte questa parte aliquota quante sono le unità dell'intero aggiunto o sottratto. Così $\frac{5}{7}$ supera $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{7}$, perchè il numeratore 5 supera il numeratore 2 di 3, e viceversa $\frac{2}{7}$ manca da $\frac{5}{7}$ di $\frac{3}{7}$, perchè il numeratore 2 manca dal numeratore 5 di 3.

Aumentando o diminuendo il solo denominatore di una frazione, il valore di questa frazione diminuisce o cresce.

È chiaro, per esempio, che $\frac{5}{9}$ è minore di $\frac{5}{6}$, perocchè la prima frazione esprime cinque none parti dell'unità, mentre la seconda esprime cinque seste parti; ora ciascuna nona parte è minore di ciascuna sesta parte; dunque cinque delle prime formeranno una quantità minore che cinque delle seconde. Viceversa $\frac{5}{6} > \frac{5}{9}$, perchè il numeratore della prima è minore del denominatore della seconda.

Si vede da ciò ch'è facilissimo di paragonare fra loro due frazioni, quand'elle abbiano o lo stesso numeratore o lo stesso denominatore, perchè risulta da ciò che si è detto fino qui che nel primo caso la prima sarà maggiore o minore dell'altra, secondo che il suo denominatore sarà minore o maggiore di quello dell'altra; nel secondo caso, la prima sarà maggiore o minore dell'altra, secondo che il suo numeratore sarà maggiore o minore del numeratore di quell'altra.

159. *Moltiplicando o dividendo per un numero il solo numerato-*

re di una frazione, il valore di questa frazione vien moltiplicato o diviso per quel numero. Al contrario, moltiplicando o dividendo per un numero il solo denominatore di una frazione, il valore di questa frazione vien diviso o moltiplicato per quel numero.

Sia, per esempio, la frazione $\frac{2}{7}$, di cui si moltiplichi il numeratore per 3; si avrà $\frac{6}{7}$ ch'è manifestamente tripla di $\frac{2}{7}$, perchè la proposta $\frac{2}{7}$ contiene due settime parti dell'unità, laddove $\frac{6}{7}$ ne contiene 6, cioè il triplo. Viceversa, $\frac{2}{7}$ è terza parte di $\frac{6}{7}$, perchè il numeratore della prima è terza parte del numeratore della seconda.

Moltiplichiamo ora per 3 il denominatore della frazione $\frac{2}{7}$; si avrà $\frac{2}{21}$, la quale sarà terza parte di $\frac{2}{7}$. Infatti quest'ultima contiene due settime parti dell'unità, l'altra ne contiene 2 ventunesime parti; ora ciascuna ventunesima parte è terza parte di ciascuna settima parte; dunque due ventunesime parti sono terza parte di due settime parti. Viceversa $\frac{2}{7}$ è tripla di $\frac{2}{21}$, perchè il denominatore della prima è terza parte del denominatore della seconda.

160. *Moltiplicando o dividendo simultaneamente per lo stesso numero ambi i termini di una frazione, il valore di questa frazione non cangia.*

Imperocchè da quello che si è veduto nel n.° precedente l'una operazione distrugge l'effetto dell'altra. Così se si abbia la frazione $\frac{2}{7}$, e si moltiplichi tanto il numeratore, quanto il denominatore per lo stesso numero 3, la frazione $\frac{6}{21}$ che così avrassi è uguale a $\frac{2}{7}$, perchè avendo triplicato il numeratore, si è triplicata la frazione, ma nello stesso tempo avendo triplicato il denomina-

tore, si è divisa per 3 la frazione; dunque $\frac{2}{7}$ è stata nello stesso tempo moltiplicata e divisa per lo stesso numero, e però non ha cangiato valore, cioè $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$. Parimente il valore di una frazione non si altera, dividendo per lo stesso numero tanto il numeratore, quanto il denominatore; infatti qui pure l' una operazione distrugge l'effetto dell'altra; così se dalla frazione $\frac{6}{7}$ si passa all' altra $\frac{2}{7}$ dividendo per 3 tanto il numeratore, quanto il denominatore, si è veduto già che $\frac{6}{7}=\frac{2}{7}$.

In ultimo farò notare che queste proprietà delle frazioni si potevano avere per già dimostrate innanzi, considerando una frazione come il quoziente del numeratore diviso pel denominatore; infatti nei n.i 101 e 111 si è dimostrato 1° che moltiplicando o dividendo per un numero il dividendo, il quoziente è pur esso moltiplicato o diviso pel numero; 2° moltiplicando o dividendo per un numero il divisore, il quoziente al contrario è diviso o moltiplicato per quel numero; 3° finalmente moltiplicando o dividendo per un medesimo numero tanto il dividendo quanto il divisore, il quoziente non cangia; alle parole *dividendo*, *divisore*, *quoziente*, sostituendo quelle di *numeratore*, *denominatore*, *frazione*, si avranno le proprietà or ora dimostrate.

Trasformazione delle frazioni.

161. Ogni frazione può assumere infinite forme diverse, rimanendo sempre la stessa in quanto al suo valore; ciò è manifesto dal n.° precedente, ove si è dimostrato che moltiplicando o dividendo tanto il numeratoro, quanto il denominatore di una frazione per lo stesso numero, il valore di questa frazione non cangia. Ora si prenda la frazione $\frac{3}{4}$ e si moltiplichino successivamente

i suoi termini per 2, 3, 4, 5, 6, ec.; si avranno le uguaglianze

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\frac{21}{28}=\frac{24}{32}=\text{ec.}$$

È chiaro che aumentando il numero per il quale si moltiplicheranno i due termini della frazione primitiva $\frac{3}{4}$, più complicata diverrà la sua novella forma, ma tutte le infinite frazioni che si possono formare in questo modo, saranno sempre le stesse in quanto al loro valore.

162. Viceversa, se si voglia passare da una di queste frazioni ad una precedente, ovvero se si voglia ridurre una di queste frazioni *a più semplice espressione*, si dovrà dividere tanto il numeratore, quanto il denominatore per uno stesso numero; ed è chiaro che quanto maggiore sarà il divisore comune, tanto più semplice sarà la nuova espressione della frazione. Così prendasi la frazione $\frac{18}{24}$ e si dividano i suoi termini pel comun divisore 2; questa frazione si ridurrà a $\frac{9}{12}$; ma se la prima frazione si fosse divisa pel divisor comune 3 maggiore di 2, sarebbesi avuta l'espressione $\frac{6}{8}$ più semplice di $\frac{9}{12}$, e se si fosse preso per divisore 6 ch'è il massimo comun divisore dei termini della frazione $\frac{18}{28}$, sarebbesi avuta l'espressione $\frac{3}{4}$ ch'è più semplice delle due prime. Ora io dico che $\frac{3}{4}$ è la più semplice espressione della frazione $\frac{18}{24}$, cioè che generalmente *quando si divide ciascuno dei termini di una frazione pel loro massimo comun divisore, si ha la più semplice espressione di quella frazione*, o come suol dirsi, si riduce quella frazione *a minimi termini*. Infatti è chiaro, che dividendo i termini della frazione pel massimo comun divisore di questi termini, si vengono a sopprimere in essi tutti i divisori comuni, e quindi i termini della nuova frazione che si avrà, saranno due numeri primi

fra loro; ora io dico che *una frazione i cui termini siano due numeri primi fra loro è irriducibile.* Imperocchè supponiamo, se è possibile, che la frazione $\frac{3}{4}$, i cui termini sono primi fra loro, possa ridursi a più semplice espressione, e che si abbia $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$; moltiplichiamo tanto il numeratore, quanto il denominatore di ciascuna di queste frazioni pel denominatore dell'altra; esse in questo modo cangeranno bensì forma, ma non valore; onde sarà $\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{4\times1}{2\times4}$; ora essendo queste due frazioni uguali, ed avendo uguali denominatori, anche i numeratori debbono essere uguali, cioè $3\times2=4\times1$, uguaglianza assurda, perchè sarebbe 4 divisibile per 3 (117), il che è contrario alla supposizione, per la quale questi due numeri sono primi fra loro.

163. È palese da ciò come dovrà procedere la soluzione di questo problema: *data una frazione, ridurla a minimi termini.* Si troverà col procedimento indicato al n°. 127 il massimo comun divisore dei due termini di questa frazione, e si dividerà ciascun termine per questo massimo comun divisore; i due quozienti saranno i termini della frazione cercata. Se i due termini della frazione proposta siano numeri troppo grandi, da non vedersi agevolmente se siano o no primi fra loro, lo stesso procedimento col quale si trova il loro massimo comun divisore, farebbe vedere se sono o no tali, perchè nel caso che siano primi fra loro, si troverebbe per massimo comun divisore l'unità; allora la frazione proposta sarebbe irriducibile.

Abbiasi, per esempio, a ridurre a minimi termini la frazione $\frac{51}{238}$; si troverà il massimo comun divisore tra 51 e 238 ch'è 17, indi diviso ciascuno di questi due numeri per 17, si hanno i quozienti 3 e 14; dunque $\frac{3}{14}$ è la più semplice espressione della frazione proposta.

164. *Una frazione che abbia per numeratore la somma o la differenza dei numeratori e per denominatore la somma o la differenza*

dei denominatori di due frazioni uguali, sarà uguale a ciascuna di queste frazioni.

Siano le due frazioni $\frac{6}{21}$ e $\frac{10}{35}$ uguali fra loro; se ciascuna di esse non è irriducibile, è chiaro che riducendole a minimi termini, la più semplice espressione sarà la stessa: questa è $\frac{2}{7}$. Ora i termini della prima frazione sono rispettivamente tripli dei termini di quest' ultima; quelli della seconda ne sono quintupli; dunque la frazione $\frac{6+10}{21+35}$, ovvero $\frac{16}{56}$ che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore la somma dei denominatori delle due proposte, ha i suoi termini ottupli di $\frac{2}{7}$, e però l'è uguale; di qui si deduce ch'ella è anche uguale a ciascuna delle due proposte.

Da ciò si può vedere come la semplicizzazione di una frazione potrebbe anche operarsi con reiterate sottrazioni al numeratore e al denominatore; ma per far ciò, dovrebbonsi prima conoscere quali siano questi vari sottrattori, il che non sempre avviene; ond'è che la maniera più comune di ridurre una frazione a minimi termini, si è quella di dividere i suoi termini pel loro massimo comun divisore.

Qualora i termini della frazione abbiano non uno, ma vari divisori comuni, l'operazione di ridurla a minimi termini potrebbe anche procedere in un modo più semplice, ricordandoci di quel principio che dividere un numero per il prodotto di più altri è lo stesso che dividerlo successivamente per ciascun fattore del divisore. Il massimo comun divisore è appunto il prodotto di tutti i divisori comuni dei due numeri (125); dunque nel caso di cui è parola si potrebbero dividere successivamente i termini della frazione pei loro vari divisori comuni, in cambio di trovare il loro massimo comun divisore; in quanto poi al vedere quali siano successivamente questi divisori comuni, la cosa potrebbe essere facilissima avverandosi alcuno dei caratteri di divisibilità veduti nel capitolo precedente.

165. Passiamo ora alla soluzione di un altro problema, cioè

data una frazione, ridurla a dato denominatore. In un sol caso è possibile questo problema, cioè quando il dato denominatore sia un multiplo del denominatore della frazione ridotta a minimi termini.

Supponiamo che voglia cangiarsi la frazione $\frac{2}{9}$ in un altra che abbia per denominatore 27; siccome 27 è triplo del denominatore, così è chiaro che moltiplicando simultaneamente per 3 i termini della frazione proposta, sarà risoluto il problema, e si avrà $\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$.

Quando un tal caso non abbia luogo, la frazione non può ridursi a dato denominatore, se non per approssimazione. Abbiasi, per esempio, a ridurre $\frac{3}{4}$ a denominatore 7; moltiplicando il numeratore della frazione data per 7, si ha $\frac{21}{4}$, e di questa dividendo il numeratore pel denominatore, si ha 5 col resto 1; onde il valore della frazione $\frac{21}{4}$ è intermedio fra 5 e 6, cioè è maggiore di 5 e minore di 6; ora siccome $\frac{21}{4}$ è settupla di $\frac{3}{4}$ perchè il numeratore è settupto del numeratore, così dividendo per 7 i due numeri 5 e 6, si avranno le due frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$, le quali differiscono fra loro di $\frac{1}{7}$ e sono l'una minore l'altra maggiore della proposta; dunque prendendo una di queste due per la frazione cercata, essa supererà o mancherà dalla proposta per meno di $\frac{1}{7}$.

166. Importante è pure quest' ultimo problema: *date più frazioni, ridurle allo stesso denominatore.*

Siano da ridursi allo stesso denominatore le due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$; si moltiplichino i termini di ciascuna pel denominatore dell'altra; si avranno così le due frazioni $\frac{21}{28}$ ed $\frac{8}{28}$, le quali saranno rispetti-

vamente uguali alle due proposte, perchè nate dal moltiplicare i termini di ciascuna di queste per lo stesso numero, e di più hanno lo stesso denominatore 28 ch'è il prodotto dei denominatori delle due frazioni date. Dunque *per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, si moltiplicheranno i termini di ciascuna pel denominatore dell'altra.*

Passiamo ora ad un numero qualunque di frazioni $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}$; moltiplichiamo i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori delle altre, e per più chiarezza indichiamo le operazioni, in cambio di eseguirle; avremo $\frac{1.5.7.9}{2.5.7.9}, \frac{3.2.7.9}{5.2.7.9}, \frac{2.2.5.9}{7.2.5.9}, \frac{4.2.5.7}{9.2.5.7}$

Queste frazioni sono rispettivamente uguali alle proposte, perchè ciascuna di esse è nata dal moltiplicare i termini di una delle proposte per la medesima quantità; esse hanno di più il medesimo denominatore, ch'è, come prima, il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni date, perocchè essi veggonsi in tutti i denominatori delle frazioni trovate, benchè con vario ordine in ciascuna, il che punto non altera il loro prodotto. Adunque *per ridurre più di due frazioni allo stesso denominatore, si moltiplichino i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori delle altre.*

167. Qualora i denominatori delle frazioni proposte siano tutti primi fra di loro, il loro prodotto è il lor minimo comun dividendo (130), ed è chiaro che il numero per il quale si moltiplicano i termini di ciascuna frazione è il quoziente di questo minimo comun dividendo diviso pel denominatore di quella frazione. Quando poi i denominatori delle frazioni proposte non siano tutti primi fra di loro, il loro prodotto è maggiore del loro minimo comun dividendo; dunque in questo caso sarebbe più semplice di prendere per denominatore comune il minimo comun dividendo dei denominatori. Si può dunque stabilire questa regola generale: *per ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore, si trovi il minimo comun dividendo di tutti i denominatori, e lo si divida particolarmente per ciascuno di essi; indi si moltiplichino i termini di ciascuna frazione pel rispettivo quoziente, e si cangeranno così le frazioni proposte in altre che avranno per denominatore comune il minimo comun dividendo dei denominatori delle prime.*

Applichiamo questa regola alle frazioni $\frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \frac{1}{15}$; per trovare il minimo comun dividendo dei denominatori, ci serviremo del metodo indicato nel n.° 131, cioè prenderemo successivamente i vari multipli del maggiore di essi 27; il quintuplo 135 ch'è il primo di questi multipli divisibile per gli altri due denominatori 9 e 15, è il minimo comun dividendo cercato; dividendo 135 per ciascuno dei denominatori 9, 27, 15, i quozienti sono 15, 5, 9; dunque moltiplicando ciascuna delle frazioni proposte pel rispettivo quoziente, le frazioni cercate saranno $\frac{30}{135}, \frac{25}{135}, \frac{9}{135}$.

E si noti che se le tre frazioni proposte si fossero ridotte allo stesso denominatore non con questa regola, ma colla generale, cioè con prendere per denominatore comune il prodotto di tutti i denominatori, ch'è 3645, le frazioni cercate sarebbero state più complicate di quelle avute ora.

Si sa che moltiplicando o dividendo simultaneamente i termini di una frazione per il medesimo numero, la frazione non si altera; ora si potrebbe domandare se lo stesso avviene aggiungendo lo stesso numero al numeratore e al denominatore.

Per vedere che avviene con ciò, ai termini della frazione $\frac{2}{5}$ si aggiunga lo stesso numero 3; si avrà $\frac{2+3}{5+3}$. Per paragonare il nuovo valore col primitivo, si riducano le due frazioni allo stesso denominatore, indicando le operazioni, e si avrà per la prima $\frac{2\times5+2\times3}{5\times5+5\times3}$, per la seconda $\frac{2\times5+3\times5}{5\times5+5\times3}$. I numeratori hanno la parte 2×5 di comune, e la seconda parte della prima 2×3 è minore della seconda parte dell'altra 3×5, perchè $2<5$; ora dal vedere che 2 e 5 sono sempre il numeratore e il denominatore della frazione proposta, si potrà conchiudere che *aumentando o diminuendo di uno stesso numero i termini di una frazione, questa frazione se è vera cresce o diminuisce, se spuria diminuisce o cresce.*

Le prime quattro operazioni sulle frazioni ordinarie.

168. Addizione. *La somma di più frazioni di medesimo denominatore si ottiene col formare una frazione che abbia per numeratore la somma dei numeratori di queste frazioni, e per denominatore il loro denominatore comune. Se abbiano diversi denominatori, si ridurranno prima allo stesso denominatore, ed indi si opererà nel modo indicato.*

Siano le frazioni $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}$, e se ne voglia la somma; è chiarissimo che si avrà $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$, o se si vogliano cavare gl'interí da questa frazione spuria, ch'è meglio, si avrà $1\frac{1}{7}$.

Ancora debba trovarsi la somma $\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$; si ridurranno prima queste frazioni allo stesso denominatore, col procedimento veduto nel n.° precedente, e poscia si opererà come innanzi; si avrà così

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{35}{70}+\frac{20}{70}+\frac{42}{70}=\frac{97}{90}=1\frac{7}{90}.$$

I denominatori delle frazioni da sommarsi sono stati in questo esempio tutti primi fra loro, e però il più semplice denominatore comune è stato il prodotto di questi denominatori. In quest'altro esempio $\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{1}{15}$ i denominatori non sono primi fra loro; onde per più semplicità prenderemo per denominatore comune il minimo comun dividendo loro ch'è 30, ed avremo

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{15}=\frac{12}{30}+\frac{9}{30}+\frac{2}{30}=\frac{23}{30}.$$

169. *La somma di un intero e di un fratto si ottiene col moltiplicare l'intero pel denominatore, aggiungere al prodotto il numeratore, e poi formare una frazione che abbia per numeratore questa somma, e per denominatore il denominatore della frazione.*

Così, per esempio, avremo $7+\frac{3}{4}=\frac{7\times4+3}{4}=\frac{31}{4}$; infatti questa operazione è la stessa di quella già fatta nel n.° 157, cioè di ridurre intero e fratto ad un sol fratto.

170. *Se abbiansi ad aggiungere interi con frazioni ad interi con frazioni, si troverà prima la somma di tutte le frazioni, ed indi cavati dalla somma gl' interi, se ce n'abbiano, si aggiungeranno alla somma dell' unità degli interi dati, e si continuerà l' addizione di questi interi.*

Vaglia l'esempio qui appresso

$$\begin{array}{r} 34\,\frac{1}{2} \\ 122\,\frac{3}{4} \\ 748\,\frac{1}{8} \\ \hline 905\,\frac{3}{8} \end{array}$$

Si sommeranno, come prima, le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$, e si avrà

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{11}{8}=1\tfrac{3}{8}.$$

Si scriverà $\frac{3}{8}$ sotto la colonna delle frazioni e si riterrà l' unità; si continuerà poi l'addizione dei numeri interi ed alla somma delle unità si aggiungerà l' unità ritenuta innanzi.

171. Sottrazione. *La differenza di due frazioni di medesimo denominatore si ottiene col formare un'altra frazione che abbia per numeratore la differenza dei numeratori di quelle due e per denominatore il loro comun denominatore. Se i denominatori siano differenti, si ridurranno prima le frazioni allo stesso denominatore, e poi si opererà nel modo indicato.*

Sia da sottrarsi la frazione $\frac{2}{7}$ dall' altra $\frac{5}{7}$; è chiaro che si avrà $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$.

Ancora abbiasi ad eseguire la sottrazione $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$; si ridurranno

queste due frazioni allo stesso denominatore, ed osservando che il minimo comun dividendo dei denominatori è 12, si avrà $\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$.

172. *Per sottrarre una frazione da un numero intero si moltiplicherà l'intero pel denominatore, dal prodotto si toglierà il numeratore, e si formerà una frazione che abbia per numeratore il resto e per denominatore il denominatore della frazione.*

Abbiasi a sottrarre $\frac{2}{5}$ da 7; si ponga 7 sotto forma di una frazione che abbia per denominatore 5, il che si fa, moltiplicando e dividendo simultaneamente 7 per 5; si ha così $\frac{35}{5}$, e la sottrazione proposta si cangerà in quest'altra $\frac{35}{5}-\frac{2}{5}=\frac{33}{5}$; osservando che $33=7\times5-2$, sarà manifesta la proposizione enunciata.

173. *Per sottrarre un intero da una frazione, si moltiplicherà l'intero pel denominatore, si sottrarrà il prodotto dal numeratore, e si formerà una frazione che abbia per numeratore il resto e per denominatore il denominatore della frazione.*

Sia da sottrarsi 3 da $\frac{29}{7}$; prima di tutto si vede che il sottraendo deve essere necessariamente una frazione spuria, perchè altrimenti non potrebbe essere maggiore di un intero. Pongasi il numero 3 sotto forma di una frazione che abbia per denominatore 7; si avrà $3=\frac{21}{7}$, e la sottrazione proposta si cangerà in quest'altra $\frac{29}{7}-\frac{21}{7}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$; ora 8 è appunto uguale a $29-7\times3$; dunque la proposizione enunciata è manifesta.

174. *La sottrazione di un intero con frazione da un intero con frazione si opera con far prima la sottrazione delle frazioni, aggiungendo a quella che fa da sottraendo una delle unità del sottraendo, ove la sottrazione non possa eseguirsi, ed indi continuando la sottrazione degli interi, coll'avvertenza di considerare diminuita di 1 la cifra delle unità del sottraendo, qualora questa siasi presa innanzi.*

Eccone un esempio

$$\begin{array}{r} 527\ \frac{1}{2} \\ \underline{160\ \frac{5}{7}} \\ 366\ \frac{11}{14} \end{array}$$

Per eseguire la sottrazione $\frac{1}{2}-\frac{5}{7}$, si ridurranno queste due frazioni allo stesso denominatore e si avrà $\frac{7}{14}-\frac{10}{14}$; ora questa sottrazione non può eseguirsi, essendo il sottraendo minore del sottrattore; dunque si prenderà una unità dall'intero del sottraendo, e si farà $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, ed allora la sottrazione $\frac{3}{2}-\frac{5}{7}$ sarà possibile, e darà $\frac{21}{14}-\frac{10}{14}=\frac{11}{14}$. Si scriverà $\frac{11}{14}$ a piè della colonna delle frazioni, e si continuerà la sottrazione degli interi, considerando diminuita di 1 la cifra 7 delle unità del sottraendo.

175. Moltiplicazione. *Il prodotto di un intero per una frazione si ottiene moltiplicando per questo intero il numeratore della frazione, o dividendone, ove sia possibile, il denominatore per esso intero.*

Si è dimostrato infatti nel n.º 159 che moltiplicando per un numero il numeratore di una frazione, il valore di questa frazione vien moltiplicato per quel numero, e che il medesimo effetto produrrebbesi, dividendo il denominatore per lo stesso numero.

Così, volendosi moltiplicare 4 per $\frac{2}{9}$, siccome il denominatore non è divisibile per 4, si dovrà moltiplicare per 4 il numeratore, e si avrà $4\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

Ma più semplice sarà il dividere il denominatore per l'intero, ove ciò sia possibile; per esempio, se abbiasi a moltiplicare $\frac{1}{12}$ per 6, si avrà $\frac{1}{12}\times 6=\frac{1}{2}$.

Qualora il denominatore non sia divisibile per l'intero, ma in-

tanto non sia primo con questo, potrebbe operarsi nei due modi insieme; così dovendo moltiplicare 6 per $\frac{3}{4}$, si osserverà che $6=2\times3$; dunque si moltiplicherà il numeratore per 3, e si dividerà il denominatore per 2; sarà così $6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$.

In ultimo farò notare che moltiplicando un intero per una frazione, il prodotto è sempre un multiplo del fattore frazionario, e lo contiene tante volte quante sono le unità del fattore intero; e che non è un multiplo del fattore intero, ma ne è maggiore o minore, secondo che l'altro fattore sia una frazione spuria od una frazione vera: questo si era già veduto nel n.° 37 in parlando generalmente del calcolo aritmetico.

176. ***Il prodotto di più frazioni è un'altra frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori di queste frazioni.***

Abbiasi a moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{7}$; secondo la definizione della moltiplicazione, il prodotto dev'essere formato con $\frac{3}{5}$ come $\frac{2}{7}$ è formato con l'unità; ora $\frac{2}{7}$ si forma coll'unità, dividendo quest'unità in sette parti uguali e prendendone due; dunque il prodotto si otterrà dividendo $\frac{3}{5}$ in sette parti uguali e prendendone due, ovvero il prodotto sarà i $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{5}$. Per avere la settima parte di $\frac{3}{5}$ si moltiplicherà il suo denominatore per 7, perocchè così, per quello che si è dimostrato nel n.° 159 la frazione resta appunto divisa per 7; si avrà così $\frac{3}{35}$; abbiam detto che il prodotto è due volte questa frazione; dunque moltiplicando il numeratore per 2, avremo $\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$; dal che si vede, come si era enunciato, che il numeratore è il prodotto dei numeratori dei due fattori, e il denominatore il prodotto dei loro denominatori.

Sia ora un numero qualunque di fattori $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$. Bisogna ricordarsi del principio che moltiplicare un numero pel prodotto di vari altri è lo stesso che moltiplicarlo successivamente per ciascun fattore del moltiplicatore; noi quindi per eseguire la moltiplicazione proposta, eseguiremo prima quella dei due fattori $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$, la quale, per quello che si è veduto or ora, dà $\frac{3\times5}{4\times6}$, indicando per più chiarezza le operazioni; moltiplicheremo poi questo prodotto pel seguente fattore $\frac{2}{3}$, ed avremo $\frac{3\times5\times2}{4\times6\times3}$; in ultimo moltiplicando quest'ultimo prodotto pel rimanente fattore $\frac{4}{7}$, avremo

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times5\times2\times4}{4\times6\times3\times7}=\frac{120}{504}.$$

Di qui si vede chiaramente come, qualunque sia il numero dei fattori, il prodotto è sempre una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori dei fattori, e per denominatore il prodotto dei loro denominatori.

Si noti che moltiplicando una frazione per essa medesima rovesciata, si ha per prodotto l' unità; così $\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{12}{12}=1$; le due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ si dicono *reciproche* l' una dell'altra, perchè generalmente *due numeri si dicono reciproci l'uno dell'altro qualora il loro prodotto sia l'unità;* così del numero 5 il reciproco è $\frac{1}{5}$ perchè $5\times\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$.

177. Da ciò si può comprendere quale sia il significato dell' espressione usata in matematica che una quantità sia *frazione di frazione di frazione di frazione*, ec. Il prodotto dei due primi fattori $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ dell'esempio di sopra ha dato il prodotto $\frac{15}{24}$, il quale, secondo la definizione della moltiplicazione, è i $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$; moltipli-

cando $\frac{15}{24}$ per l'altro fattore $\frac{2}{3}$ si è avuto $\frac{30}{72}$ che è i $\frac{2}{3}$ di $\frac{15}{24}$, cioè i $\frac{2}{3}$ di $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$; finalmente il prodotto totale $\frac{120}{504}$ è i $\frac{4}{7}$ di $\frac{2}{3}$ di $\frac{5}{6}$ di $\frac{3}{4}$, cioè frazione di frazione di frazione di frazione.

Dunque se si cercasse una quantità che sia i $\frac{3}{7}$ di $\frac{5}{9}$ di $\frac{1}{2}$, questa sarebbe il prodotto di tutte queste frazioni, cioè $\frac{15}{126}$, ovvero $\frac{5}{42}$, dividendo i termini della frazione pel comun divisore 3.

178. *Il prodotto d' interi con frazioni per interi con frazioni si ottiene riducendo ciascun intero con frazione ad una sola frazione spuria, moltiplicando tutte queste frazioni spurie fra loro, e cavando poi gl' interi dal prodotto.*

Abbiasi, per esempio, ad eseguire la moltiplicazione $3\frac{1}{2} \times 53\frac{2}{7} \times 13\frac{3}{4}$; riducendo in ciascun fattore intero e fratto a un sol fratto, si cangerà il prodotto in quest'altro $\frac{7}{2} \times \frac{373}{7} \times \frac{55}{4} = \frac{143553}{56} = 2563\ \frac{27}{56}$.

179. Divisione. *Si divide una frazione per un numero intero, moltiplicando il denominatore per questo intero, o dividendo, se sia possibile, per questo intero il numeratore.*

Questo è chiarissimo da ciò che si è dimostrato nel n°. 159.

Abbiasi a dividere $\frac{3}{4}$ per 7; siccome il numeratore non può dividersi per 7, si moltiplicherà il denominatore per 7, e si avrà $\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{28}$. Per un altro esempio, sia proposta la divisione $\frac{10}{13} : 5$; essendo il numeratore divisibile per 5, si avrà per quoziente $\frac{2}{13}$; e si noti che in questo modo si ha il vantaggio di ottenere una frazione più semplice; infatti se si fosse moltiplicato per 5 il deno-

minatore, sarebbesi avuto $\frac{10}{65}$, che ridotta a minimi termini dà $\frac{2}{13}$.

180. *Il quoziente di una frazione divisa per un' altra frazione si ottiene col moltiplicare la frazione che fa da dividendo per la reciproca di quella che fa da divisore.*

Così se si debba dividere $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{5}$, dico che si avrà $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21}$.

Infatti per la definizione della divisione $\frac{2}{7}$ è un prodotto del quale è dato il fattore $\frac{3}{5}$, e si cerca l' altro fattore; dunque $\frac{2}{7}$ e i $\frac{3}{5}$ del fattore incognito, e però il quintuplo di $\frac{2}{7}$, cioè $\frac{10}{7}$ sarà il triplo di questo fattore incognito; adunque la terza parte di $\frac{10}{7}$, cioè $\frac{10}{21}$ sarà il quoziente cercato.

Qualora il numeratore della prima frazione sia divisibile pel numeratore della seconda, e il denominatore pel denominatore, sarà più semplice di dividere termine a termine; così $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Qui il prodotto $\frac{8}{9}$ è proprio quello che si ottiene senza posteriore semplicizzazione dal moltiplicare i fattori $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, e quindi si è fatta l'operazione inversa di quella onde si ha quel prodotto.

181. *Il quoziente di un numero intero diviso per una frazione si ottiene moltiplicando l'intero per la reciproca della frazione.*

Sia da dividersi 3 per $\frac{2}{9}$; invece di 3 si potrà scrivere $\frac{3}{1}$; onde la divisione si cangerà in quell'altra $\frac{3}{1} : \frac{2}{9} = \frac{3}{1} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$.

182. *Il quoziente di un intero con frazione diviso per un intero con frazione si ottiene riducendo nel dividendo e nel divisore intero e fratto ad un sol fratto e dividendo l'un fratto per l' altro.*

Se abbiasi, per esempio, a dividere $9\frac{3}{4}$ per $5\frac{3}{7}$, si prenderanno

le due frazioni $\frac{39}{4}$ e $\frac{17}{3}$ rispettivamente uguali alle due quantità date, e la divisione proposta si potrà cangiare in quest' altra $\frac{39}{4} : \frac{17}{3} = \frac{39}{4} \times \frac{3}{17} = \frac{117}{68} = 1\,\frac{49}{68}$.

183. Osservazione generale. Si osservi in primo luogo che le definizioni delle prime quattro operazioni sulle frazioni essendo le stesse che di quelle eseguite sugl' interi, le ripruove per queste operazioni sui fratti saranno le stesse che per i numeri interi. Di maniera che per fare la ripruova dell' addizione, se prima si è operato in un senso, dipoi si eseguiranno le addizioni parziali in senso inverso; o pure si farà la somma di tutte le frazioni proposte, meno una sola, si toglierà questa somma da quella di tutte quante trovate innanzi, e se l' operazione è stata ben fatta, si dovrà trovare per resto quella frazione che non è stata compresa nella seconda somma. Per la sottrazione, si sommerà il sottrattore col resto, e si dovrà avere il sottraendo. Per la moltiplicazione, dividendo il prodotto per un fattore, si dovrà avere l'altro fattore. In ultimo per la divisione, il prodotto del divisore pel quoziente dovrà essere uguale al dividendo. Si vede poi che la ripruova per 9 e per 11 della moltiplicazione e della divisione non si può applicare che ai soli numeri interi.

Anco non è da tralasciare un' osservazione che conferma ciò di cui è stato già parola nel n.° 93, che le operazioni le quali si eseguono sui numeri sono tanto più semplici quanto più si avvicinano all'origine di essi numeri. Le frazioni hanno origine dalla divisione, ch' è l' inversa della moltiplicazione; dunque la moltiplicazione e la divisione delle frazioni sono più semplici dell' addizione e della sottrazione, come infatti si è veduto poco innanzi.

In quanto ai casi di possibilità e d' impossibilità delle prime quattro operazioni sulle frazioni, osserveremo che la sola sottrazione può essere alcuna volta impossibile, ma le altre tre sono sempre possibili. La ragione di questa differenza delle operazioni delle frazioni da quelle degl' interi si è che in questi ultimi, come si è veduto già nell' idea generale del calcolo aritmetico, la moltiplicazione e la divisione non si riducono che ad un caso particolare di addizione e di sottrazione, ond' è che potendo essere im-

possibile la sottrazione, il simile può anche avvenire della divisione, quando colà essa non corrisponde alla medesima idea, ma sì a quella di una iterata sottrazione. Da ciò si vede che pei numeri interi due sono in sostanza le operazioni, ciò sono l'addizione e la sottrazione; ma per le frazioni elle sono quattro ed essenzialmente diverse l'una dall'altra.

In ultimo è da notare che dal modo onde abbiamo visto eseguirsi la moltiplicazione delle frazioni, la quale riducesi a quella dei loro termini, cioè di numeri interi, si può conchiudere che gran parte delle proprietà generali dei numeri esposte nel capitolo III e considerate colà solamente pei numeri interi, convengono medesimamente alle frazioni, eccettuatene però quelle che riguardano la scomposizione in fattori primi, ed i caratteri di divisibilità. Così è chiaro che qualunque sia l'ordine onde si eseguano le moltiplicazioni parziali nel fare il prodotto di più frazioni, questo prodotto riman sempre lo stesso; se si moltiplica o si divide per un numero una di queste frazioni, il prodotto resta medesimamente moltiplicato, o diviso per quel numero, ec.

Delle frazioni continue[1] *— Riduzione di una frazione ordinaria in frazione continua, e viceversa.*

184. Definizione. *Si chiama* frazione continua *una frazione che ha per numeratore l'unità, e per denominatore un numero intero più una frazione che ha per numeratore l'unità, per denomina-*

[1] *Milord Brouncker*, dice il Lagrange, *est, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues: on connaît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit à l'aire du cercle et qui est* $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+,\ ec.}}}$

*Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'A*rithmetica infinitorum *quelques recherches sur ce sujet dans lesquelles Wallis démontre d'une manière assez indirecte, quoique fort ingénieuse l'identité de l'expression de Brouncker avec la sienne, qui est, comme l'on sait* $\frac{3.3.5.5.5..}{2.4.4.6.6..}$

tore un numero intero più una frazione che ha per numeratore l'unità, e così continuando.

Questa che segue, a cagion d'esempio, è una frazione continua.

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

Le frazioni continue hanno avuto origine dal ridurre approssimativamente a più semplice espressione una frazione irriducibile, i cui termini siano considerevolmente alti, per così avere una idea più esatta della sua grandezza.

Abbiasi a ridurre ad una espressione più semplice la frazione $\frac{192}{1715}$, i cui termini sono due numeri primi fra loro, e che però è irriducibile (162); è chiaro che la frazione che si avrà non potrà essere uguale alla proposta, perocchè in tal caso questa non sarebbe più irriducibile, ma intanto, quantunque non si otterrà che un valore approssimativo, il vantaggio sarà di avere una frazione i cui termini per essere più semplici, forniranno una più precisa idea della proposta.

Si dividano i termini della frazione $\frac{192}{1715}$ per il numeratore; si avrà la frazione $\frac{1}{\left(\frac{1715}{192}\right)}$ uguale alla prima (160); si esegua la divisione indicata nel denominatore, la quale dà $8+\frac{179}{192}$; la fra-

il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste il ne paraît pas que l'un ou l'autre de ces deux grand géomètres ait connu les principales propriétés et les avantages singuliers des fractions continues : nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à Huyghens — (Additions à l'Algèbre d'Euler — n.° 1).

zione $\frac{1}{\left(\frac{1715}{192}\right)}$ si cangerà in quest'altra $\frac{1}{8+\frac{179}{192}}$. In quest' ultimo valore, disprezzando al denominatore la frazione $\frac{179}{192}$, si ha $\frac{1}{8}$ che è maggiore della proposta, essendosi diminuito il denominatore. Se invece di togliere dal denominatore la frazione vera $\frac{179}{192}$ si fosse aggiunta ad 8 l'unità; sarebbesi avuto $\frac{1}{9}$, ch'è minore della proposta, per essersi aumentato il denominatore. Adunque il valore della frazione proposta è maggiore di $\frac{1}{9}$ e minore di $\frac{1}{8}$; il che, come si vede, fornisce già un'idea bastantemente precisa della frazione $\frac{192}{1715}$.

La differenza delle frazioni $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{8}$ è $\frac{9-8}{72}=\frac{1}{72}$; dunque l'errore che si farà nel prendere una di queste frazioni per la proposta sarà minore di $\frac{1}{72}$.

Se vogliasi che l'errore sia più piccolo, non si dovrà fare altro che trovare due limiti più vicini di quelli avuti innanzi. Per far ciò, si riprenda la frazione $\frac{1}{8+\frac{179}{192}}$ e si operi come prima sulla frazione $\frac{179}{192}$, cioè si dividano i suoi termini pel numeratore 179; si avrà,

$$\frac{1}{8+\frac{179}{192}}=\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{13}{179}}}$$

e non facendo conto di $\frac{13}{179}$, si avrà $\frac{1}{9}$, ch'è minore della proposta.

Se in cambio di negligere $\frac{13}{179}$ si fosse aggiunto ad 1 l'unità, si sarebbe ottenuto $\frac{1}{8+\frac{1}{2}}$, o riducendo intero e fratto ad un sol fratto nel denominatore, $\frac{1}{\left(\frac{17}{2}\right)}$, o in ultimo, moltiplicando il numeratore e il denominatore per 2, $\frac{2}{17}$, ch' è maggiore della proposta, essendosi aumentato il denominatore. Dunque $\frac{192}{1715}$ è maggiore di $\frac{1}{9}$ e minore di $\frac{2}{17}$.

La differenza tra i due limiti $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{17}$ è $\frac{18-17}{153}$, cioè $\frac{1}{153}$, laonde l'errore che si fa prendendo una di queste frazioni per la proposta, è minore di $\frac{1}{153}$, e però così l'approssimazione è maggiore.

Perchè l'approssimazione sia spinta ancora più oltre, si opererà nella frazione $\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{13}{179}}}$ come prima, cioè si divideranno i termini di $\frac{13}{179}$ pel numeratore 13 e si avrà,

$$\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{13}{179}}}=\frac{1}{8+\frac{1}{1+\frac{1}{13+\frac{10}{13}}}}$$

Disprezzando $\frac{10}{13}$, e riducendo, come prima, successivamente

intero e fratto ad un sol fratto, si otterrà $\frac{14}{125}$, ch'è minore della proposta; e se in cambio di disprezzare $\frac{10}{13}$, si aggiungesse a 13 l'unità, sarebbesi avuto $\frac{15}{135}$, maggiore della proposta.

Adunque la frazione $\frac{192}{1715}$ è compresa tra le due $\frac{14}{125}$ e $\frac{15}{135}$, e siccome la differenza di queste due è $\frac{1870-1875}{3375}=\frac{15}{3375}$, così nel prendere una di esse per la proposta, l'errore sarà minore di $\frac{15}{3375}$ ovvero di $\frac{1}{225}$.

Continuando ad operare su $\frac{10}{13}$, come innanzi si ha

$$\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{10}{13}}}}=\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{10}}}}}$$

e si troverebbero in un modo intieramente simile due limiti più vicini.

E dividendo ancora i termini di $\frac{3}{10}$ pel numeratore 3, ottiensi

$$\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

Giunti a questo termine, cioè ad avere per numeratore dell'ultima frazione l'unità, l'operazione non si può protrarre più in-

nanzi e la frazione continua che si è avuta è uguale alla proposta $\frac{192}{1715}$.

Disprezzando $\frac{1}{3}$ si calcolerebbero ancora i due ultimi e più vicini limiti della frazione proposta, ma intanto, essendo i termini di questi alquanto alti, è più semplice e più conforme allo scopo di prender quelli trovati prima, comechè l' approssimazione sia minore.

185. Ponendo mente alla serie delle operazioni eseguite per convertire la frazione $\frac{192}{1715}$ in frazione continua, si vede che queste operazioni sono state quelle stesse che si sarebbero fatte, se si fosse voluto trovare il massimo comun divisore fra i due termini 192 e 1715. Infatti si è prima diviso il numero maggiore pel minore, e il quoziente intero è stato l' intero del denominatore; indi il divisore si è diviso pel resto, e il quoziente intero è stato l' intero della seconda frazione; si è poi diviso il resto primo pel resto secondo, e così di seguito. Laonde si può stabilire la seguente regola:

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione continua, si operi sui due termini di questa frazione, come per trovare il loro massimo comun divisore, spingendo l' operazione fino a che abbiasi un resto uguale a zero. I quozienti successivi che così si avranno, saranno i denominatori delle frazioni propriamente dette che costituiscono la frazione continua. Ove la frazione proposta sia spuria, il primo quoziente sarà una parte intera da aggiungersi alla frazione continua.

Applichiamo questa regola alla frazione proposta $\frac{192}{1715}$. Si opererà sui due numeri 192 e 1715 come per trovare il loro massimo comun divisore nel modo che segue.

	8	1	13	1	3	3
1715	192	179	13	10	3	1
					0	

$$\text{dunque } \frac{192}{1715}=\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}}.$$

186. Viceversa, se da una frazione continua si voglia pervenire alla ordinaria corrispondente, le operazioni saranno inverse: Così ragionando sulla frazione continua trovata or ora, è chiaro che si ridurrà prima $3+\frac{1}{3}$ ad un sol fratto, cioè a $\frac{10}{3}$; indi si farà $\frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)}=\frac{3}{10}$; si ridurrà poi $1+\frac{3}{10}$ a $\frac{13}{10}$, e si farà $\frac{1}{\left(\frac{13}{10}\right)}=\frac{10}{13}$; e così continuando, si avrà $13+\frac{10}{13}=\frac{179}{13}$; $\frac{1}{\left(\frac{179}{13}\right)}=\frac{13}{179}$; $1+\frac{13}{179}$ $=\frac{192}{179}$; $\frac{1}{\left(\frac{192}{179}\right)}=\frac{179}{192}$; $8+\frac{179}{192}=\frac{1715}{192}$, ed in ultimo $\frac{1}{\left(\frac{1717}{192}\right)}$ $=\frac{192}{1715}$.

Si avrà dunque la regola seguente: *Per convertire una frazione continua in frazione ordinaria, all'ultima frazione parziale si aggiunga il denominatore della frazione parziale precedente, riducendo tutto ad un sol fratto; si rovesci questo fratto ottenuto; a questo fratto così rovesciato si aggiunga il denominatore della frazione precedente, riducendo tutto ad un sol fratto; si rovesci questo fratto, e così di seguito. Quando si perverrà ad aggiungere il denominatore della prima frazione parziale, il fratto che ne risulterà, rovesciato, darà la frazione ordinaria equivalente alla frazione continua proposta.*

Molte ed importanti sono le proprietà delle frazioni continue, e la loro ricerca ha richiesto le cure dei più illustri geometri; ma noi cesseremo qui di far più parola di questo argomento, stante

che a volerlo svolgere compiutamente bisognerebbe ricorrere ai mezzi che ne fornisce l'algebra, alla quale noi rimettiamo una tale teorica. [1]

---

[1] In verità nemmeno nei trattati elementari di algebra si trova svolta in tutta la sua ampiezza questa materia, e noi indirizziamo i nostri lettori che avessero entratura nell'algebra all'eccellente trattato datone dal Lagrange nelle sue *addizioni all'Algebra di Eulero*, n.° 1.

CAPITOLO V.

FRAZIONI DECIMALI.

Le prime quattro operazioni sulle frazioni decimali.

187. Abbiamo già veduto innanzi (18) che una frazione dicesi decimale, qualora contenga decimi, centesimi, millesimi, ec. dell'unità, ovvero quando il suo denominatore sia l'unità seguita da qualsivoglia numero di zeri.

Della scrittura di tali frazioni si è trattato già nel sistema di numerazione (25), sicchè sarebbe superfluo di farne qui nuovamente parola. Se si voglia scrivere la frazione decimale $\frac{5}{1000}$ nella maniera più semplice, si sa che dee scriversi 0, 005; parimente $\frac{300087}{10000}$ si scriverà 30, 0087, ec.; in generale si porranno tante cifre nella parte decimale quanti sono gli zeri del denominatore.

188. Passeremo ora ad osservare quale alterazione soffre il valore di una frazione decimale, quando si faccia cangiar luogo alla virgola. Sia la frazione decimale 384, 2854; si faccia avanzare di un posto la virgola verso destra; si avrà 3842, 854, il cui valore è decuplo della proposta. Infatti nella proposta la prima cifra a sinistra 3 rappresenta centinaia, mentre nella seconda frazione decimale rappresenta migliaia, cioè il decuplo; la seconda cifra 8 nella prima esprime decine, nella seconda centinaia, ovvero il decuplo; e così continuando vedesi che le unità dell'una son divenute decine dell'altra, i decimi unità, i centesimi decimi, i millesimi centesimi, i diecimillesimi millesimi; dunque ciascuna ci-

fra della seconda frazione è decupla della rispettiva della prima, e però tutta la seconda è decupla di tutta la prima. Avanzando la virgola nella seconda di un altro posto verso destra, si ha 38428,34, ch'è, per quello che ora si è detto, declupa di 3842, 834, e quindi centupla della proposta 384, 2834. Continuando così ad avanzare di tre, quattro, ec. posti la virgola nella proposta, questa prenderà un valore mille volte, diecimila volte, ec. maggiore.

Al contrario paragonando una di queste ultime alle antecedenti successive, si vede ch'elle ne sono decime parti, centesime parti, millesime parti, ec.

Adunque si stabilirà che *secondo che in una frazione decimale si avanza di uno, due, tre, ec. posti la virgola da sinistra a destra, questa frazione acquista un valore decuplo, centuplo, milluplo, ec. Secondo che si fa retrocedere di uno, due, tre, ec. posti da destra a sinistra, la frazione diviene decima parte, centesima parte, millesima parte, ec. del suo valore primitivo.*

È chiaro da ciò che per dividere un numero intero per 10, 100, 1000, ec. non ci abbisogna operazione, ma basta separare con una virgola una, due, tre, ec. cifre da sinistra a destra. Così 3846 diviso per 10 dà la frazione decimale 384, 6, perocchè infatti si è veduto che prendendo in questo modo la decima parte di ciascuna cifra, si prende la decima parte del tutto. Parimente lo stesso numero diviso per 1000, dà 3, 846; diviso per 1000000, dà 0,003846. Quest'ultimo risultamento merita una particolare attenzione: siccome il divisore è maggiore del dividendo, il quoziente dev'essere una frazione vera, e però dovrà trovarsi zero nella parte decimale; or questo si accorda colla regola da noi data. Infatti, essendo sei gli zeri del divisore, sei dovranno anche essere le cifre della parte decimale; ma il numero proposto non ha che quattro cifre; adunque si son posti due zeri a sinistra di questo numero per formare la parte decimale, e così non sono rimaste cifre significative per la parte intera.

189. Richiameremo ancora alla mente del lettore un'altra cosa detta innanzi (26, 4°), cioè che il valore di una frazione decimale non soffre alterazione alcuna, se si scrivano, o si sopprimano a destra della parte decimale quanti zeri si vogliano. Così 0, 34 è lo stesso che 0, 3400, che 0, 34000, ec.; infatti le cifre della parte

decimale conservando sempre il loro posto, conservano anche il valor loro, e però la frazione decimale non cangia. O può vedersi anche in questo modo: 0, 34 è lo stesso che $\frac{34}{100}$, e 0, 3400 è lo stesso che $\frac{3400}{10000}$; ora queste due frazioni ordinarie sono uguali, perchè la seconda si ottiene moltiplicando per 100 tanto il numeratore quanto il denominatore della prima; similmente si ragionerà per qualunque numero di zeri aggiunti o soppressi a destra della frazione decimale.

Qualora dunque si vogliano ridurre allo stesso denominatore più frazioni decimali, altro non bisognerà fare se non uguagliare le cifre nelle parti decimali, scrivendo a destra di quelle che ne hanno meno un numero sufficiente di zeri. Così le frazioni 3,04 | 0,5 | 0,0034 | 1,253 ridotte allo stesso denominatore, dànno 3,0400 | 0,5000 | 0,0034 | 1,2530.

Dopo queste osservazioni passeremo facilissimamente a trattare delle prime quattro operazioni sulle frazioni decimali, il calcolo delle quali si ridurrà a quello dei numeri interi, essendo lo stesso il modo della loro scrittura. Sarà chiaro così il gran vantaggio che si ha nel calcolo delle frazioni decimali su quello delle frazioni ordinarie, per aver tolto via l'imbarazzo dei denominatori.

190. Addizione. *Per sommare più frazioni decimali si riducano prima queste allo stesso denominatore, ch'è quanto dire si uguaglino le cifre nelle parti decimali scrivendo gli zeri sufficienti a destra di quelle che ne hanno meno, si esegua poi l'addizione dei numeri interi, e a destra della somma si separino tante cifre decimali quante ne ha ciascuna frazione.*

Così volendo sommare le frazioni decimali 3,4 | 0,056 | 3,04527 | 583,2, si ridurranno prima allo stesso denominatore ed indi disposte l'una sotto l'altra, collocando nella stessa colonna le unità dello stesso ordine, si farà l'addizione come nei numeri interi, nel modo che segue.

```
  3,40000
  0,05600
  3,04527
583,20000
---------
589,70127
```

Dovendosi separare a destra della somma tante cifre decimali quante ne ha ciascuna frazione, si vede che la virgola cade nello stesso posto; quindi nella pratica si può fare a meno di scrivere gli zeri che servono ad uguagliare le cifre delle parti decimali, badando però bene di scrivere le unità dello stesso ordine in una colonna medesima, e di porre la virgola nella somma al posto che le appartiene.

Questo procedimento non ha bisogno di una nuova dimostrazione, perocchè siccome i valori relativi delle unità di vario ordine seguono la medesima legge che nei numeri interi, i ragionamenti per le ritenute che si hanno dalle somme delle varie colonne sono gli stessi di quelli già fatti pei numeri interi.

191. Sottrazione. *Per sottrarre una frazione decimale da un' altra, si riducano prima entrambe allo stesso denominatore, ed indi eseguita la sottrazione come fra due numeri interi, si separino a destra del residuo tante cifre decimali quante ne ha ciascuna frazione.*

Abbiasi a sottrarre 3,47253 da 12,5; uguagliate le cifre nelle parti decimali, la sottrazione si opererà come fra due numeri interi, nel modo che segue

```
12,50000
 3,47253
--------
 9,02747
```

Qui pure, dovendo separare a destra del residuo tante cifre decimali quante ne ha ciascuna frazione, la virgola cade nel medesimo posto; onde nella pratica, ove il sottraendo abbia più cifre decimali che il sottrattore, si può tralasciare di scrivere nella parte decimale di quest' ultimo gli zeri indicati dalla regola.

192. Moltiplicazione. *Il prodotto di due frazioni decimali si ottiene eseguendo la moltiplicazione come fra due numeri interi, e separando a destra del prodotto tante cifre decimali quante ne hanno i due fattori insieme.*

Vaglia l'esempio seguente

$$\begin{array}{r} 35,045 \\ 3,52 \\ \hline 70090 \\ 175225 \\ 105135 \\ \hline 123,35840 \end{array}$$

Facendo per un momento astrazione della virgola nell'uno o nell'altro fattore, si è trovato il prodotto dei due numeri interi 35045 e 352, indi a destra del prodotto si sono separate cinque cifre decimali, cioè quanto ne hanno i due fattori insieme.

La dimostrazione di ciò è chiarissima; il primo fattore equivale a $\frac{35045}{1000}$, il secondo a $\frac{352}{100}$; il prodotto di queste due frazioni ordinarie è $\frac{35045 \times 352}{100000}$; dunque essendo cinque gli zeri del denominatore, bisognerà separare a destra del prodotto che trovasi al numeratore cinque cifre decimali.

Anche può dirsi: non considerando la virgola nel moltiplicando, è come se la si fosse avanzata di tre posti verso destra, e però il primo fattore si è moltiplicato per 1000; parimente il secondo si è moltiplicato per 100; dunque (108) il prodotto che si ottiene è 1000×100, cioè 100000 volte maggiore di quello che si cerca, dunque dividendo per 100000 il prodotto trovato, cioè separandovi a destra cinque cifre decimali, si ha il prodotto richiesto.

È da notare che se le cifre del prodotto siano in minor numero che le cifre decimali che vi si debbono separare a destra, bisognerà scrivere gli zeri sufficienti a sinistra di questo prodotto per formare la parte decimale. Così avendosi a moltiplicare 3, 5 per 0,0007, facendo prima la moltiplicazione di 35 per 7 si trova 245; dunque dovendo essere cinque le cifre della parte decimale, si avrà $3,5 \times 0,0007 = 0,00245$.

193. Divisione. *La divisione di una frazione decimale per un'altra si opera con uguagliare il numero delle cifre nelle parti decimali, togliere le virgole dai numeri che così si hanno, e dividere l'uno per l'altro i due numeri interi che risultano.*

Noi qui supporremo che sia sempre il dividendo maggiore del divisore, perocchè del caso che sia minore si parlerà poco appresso.

Sia da dividersi 5, 796 per 3, 6; uguagliando il numero delle cifre decimali si ha 5,796 e 3,600; togliendo la virgola al dividendo e al divisore, risultano i due numeri interi 5796 e 3600, i quali debbono dare il medesimo quoziente che le due frazioni proposte; infatti togliendo la virgola al dividendo e al divisore, si è moltiplicato l'uno e l'altro per 1000, e però il quoziente non dovrà cangiare; onde si avrà

$$\frac{5,796}{3,6}=\frac{5,796}{3,600}=\frac{5796}{3600}=1\,\tfrac{2196}{3600}.$$

Lo stesso si farebbe se il dividendo fosse un numero intero, come si vede nell'esempio infrascritto

$$\frac{132}{0,11}=\frac{132,00}{0,11}=\frac{13200}{11}=1200.$$

Si potrebbe anche in questo caso eseguire la divisione come fra due numeri interi e poi scrivere tanti zeri a destra del quoziente quante sono le cifre decimali del divisore. Così nel nostro esempio facendo 132 : 11 =12, siccome si è moltiplicato per 100 il divisore, il quoziente è stato diviso per 100, e però moltiplicandolo per 100, cioè scrivendosi a destra due zeri, si ha 1200 per il quoziente cercato.

Metodi abbreviati per le approssimazioni.

194. Qualora si abbiano molte cifre nella parte decimale di una frazione decimale, si suole spesso non tener conto di alcune ultime a cagione della estrema loro picciolezza; così è chiaro che qua-

lunque sia la grandezza dell' unità nelle cose che occorre numerare ordinariamente, i centomillesimi, i milionesimi di questa unità saranno sempre da negligere, perchè la loro picciolezza è tale da non portare alterazione sensibile al valore della grandezza che si considera; e divenendo più piccola l' unità, meno saranno le cifre decimali che meritano di essere considerate.

Abbiasi, per esempio, la frazione decimale 7,3238, e suppongasi che l' unità sia il *palmo;* i diecimillesimi ed i millesimi del palmo sono di tal picciolezza che quasi sfuggono ai sensi, e però si possono benissimo disprezzare; sicchè invece della frazione proposta si prenderà 7,32, la quale differisce dal vero valore della quantità che si vuole esprimere per meno di 0,01, perchè è chiaro che quante siano le cifre che si negligeranno dai millesimi in poi, tutte queste formeranno sempre una quantità minore di 0,01. I millesimi disprezzati sono 3, onde non tenendo conto dei diecimillesimi la frazione 7,32 manca da 7,3238 per 0,003. Se poi si volesse tener conto eziandio dei centesimi, anzi di quante altre cifre possano seguire i millesimi, siccome tutte queste non potranno mai dare 0,001, così si dirà che 7,32 manca da 7,3278... per meno di 0,004.

Parimente se nella frazione decimale 7,3278..., essendo ancora l'unità il palmo, vogliansi arrestare le cifre decimali ai centesimi, si avrà 7,32 che mancherà da 7,3278... per meno di 0,008. Ora se si aumentasse di 1 la cifra dei centesimi, si avrebbe 7,33 la quale supera 7,3278..., perchè, come abbiamo detto, tutte le cifre decimali che seguissero dai millesimi in poi non formerebbero mai 0,01. Per vedere di quanto propriamente 7,33 supera 7,3278..., si osservi che a 0,007 bisognerebbe aggiungere 0,003 per avere 0,01; dunque astrazion fatta dei diecimillesimi, 7,33 supera 7,3278... di 0,003; e se si vogliano considerare tutte le rimanenti cifre decimali, la supererà per meno di 0,003. Ora siccome non volendo tener conto di alcune cifre decimali, si cerca sempre di fare il minimo errore, non essendo da preferire l' errore piuttosto in meno che in più, così in vece di 7,3278... si prenderà 7,33, e non 7,32, perchè la prima è minore del vero valore per meno di 0,008, la seconda n' è maggiore, ma per meno di 0, 003. Ciò è avvenuto perchè la cifra dei millesimi 7 è maggiore

di 3, e però ci voleva meno per arrivare a 10, che se fosse stata minore di 5, come nella prima frazione proposta 7,3238, ove la cifra dei millesimi essendo 3, se si fosse preso 7,33 in cambio di 7,32 si sarebbe errato in più per meno di 0,007, laddove prendendo 7,32 si erra in meno, ma per meno di 001; se la cifra che segue quella a cui bisogna arrestarsi fosse 5, allora lasciando la prima quale è, si errerebbe in meno per meno di 0,006, aumentandola di 1 si errerebbe in più per meno di 0,005; dunque in questo caso è da preferire anche di aumentare di 1 la cifra cui fa d' uopo arrestarsi. Abbiasi dunque per regola che *volendo disprezzare alcune cifre decimali, fa d' uopo, per commettere il minimo errore, lasciare qual è la cifra alla quale bisogna arrestarsi, se quella che la segue sia minore di 5; se questa sia uguale a 5, o ne sia maggiore, fa d' uopo aumentare la prima di 1.*

195. Quando si voglia la somma di più frazioni decimali fino ad una data cifra decimale, si potranno tralasciare in ciascuna di esse tutte quelle che seguono quella data cifra coll' avvertenza di aumentare questa cifra di 1 se quella che la segue sia o 5 o maggiore di 5; indi si eseguirà l' addizione. Ma se i numeri da sommarsi siano molti, la somma di tutti gli errori che si fanno in ciascuno di essi potrebbe produrre un errore alquanto considerevole nel totale, onde si può operare generalmente in un modo che dà una maggiore approssimazione. Si considererà in ciascuna frazione decimale una cifra di più di quella cui bisogna arrestarsi, coll' avvertenza di aumentarla di 1 quando la seguente sia 5 o maggiore di 5; indi della somma che si ha nella prima colonna si riterrà la sola cifra delle decine aumentandola di 1 qualora quella delle unità sia 5 o maggiore di 5.

Per la sottrazione essendo due i numeri, l' errore sarà sempre lievissimo operando nel primo modo, cioè arrestando le cifre decimali del sottraendo e del sottrattore a quella che si vuole per ultima nel residuo, e poi eseguendo la sottrazione.

196. Indicheremo ora quale è il metodo di abbreviazione col quale si moltiplicano due frazioni decimali qualora si cerchi il loro prodotto sino ad una data cifra decimale.

Nel primo a sinistra dei due esempi infrascritti si vuole il prodotto fino ai centesimi, nel secondo fino ai decimi. La moltiplica-

ne è eseguita nel modo indicato al n.° 68, cioè prendendo le cifre del moltiplicatore da sinistra a destra; i prodotti parziali trovansi disposti nel modo colà stabilito.

```
17,153               3,127
 3,42               72,34
------             -------------
51,459 |           218,68 |
 6,861 | 2           6,14 | 8
 0,342 | 06          0,93 | 72
--------------       0,12 | 496
58,662 | 26        -------------
                   225,89 | 016
```

Badando beno di porre in ciascun prodotto parziale la virgola al posto che le conviene, e separando in tutti con una linea verticale tutte le cifre decimali che vogliónsi tralasciare, eccetto la prima, in modo che nel primo esempio dovendoci arrestare ai centesimi, la linea verrà dopo i millesimi, nel secondo, devendo sostare ai decimi, verrà dopo i centesimi; si vede che tutte le cifre decimali che sono a destra della linea, non influendo se non sulla cifra decimale che segue quella cui bisogna arrestarsi, nulla o certo pochissimo influiranno su quest' ultima. Di maniera che sarebbe per brevità da cercare un metodo di trovare nel prodotto le sole cifre decimali che si cercano con una di più, senza trovare anche tutte le altre. Ora, riflettendo un poco per qual cifra del moltiplicando si è moltiplicata ciascuna cifra del moltiplicatore per aver le cifre dell' ultima colonna prima della linea, sarà facilissimo di stabilire la regola che segue: *Si scrivano le cifre del moltiplicatore in un ordine inverso sotto quelle del moltiplicando, badando di porre quelle delle unità sotto quella che segue nel moltiplicando la cifra cui bisogna arrestarsi; indi si esegua la moltiplicazione come fra due numeri interi, coll' avvertenza di cominciare ciascun prodotto parziale dalla cifra ch' è nella stessa colonna al di sopra di quella del moltiplicatore che dà questo prodotto, e di scrivere le prime cifre a destra di ciascun prodotto parziale in una colonna medesima. Trovato il prodotto totale, si sopprima l' ultima cifra decima-*

le a destra, e posta la virgola dove capita, si avrà il prodotto sino alla cifra decimale cercata. [1]

Applichiamo questa regola ai due esempi veduti di sopra

```
17,15 3           3,12 7
   24 3           4 32 7
--------         --------
51,45|9          218,5|4
 6,86|0            6,2|4
 0,34|2              9|3
--------             1|2
58,66|1          --------
                 225,8|3
```

Nel primo esempio a sinistra si sono scritte in un ordine inverso le cifre del moltiplicatore 3,42 e si è avuto 243; volendosi il prodotto fino ai centesimi, si è situata la cifra delle unità 3 sotto i millesimi, indi si è fatto il prodotto del moltiplicando per 3 e si è posta la virgola dove conveniva; il secondo prodotto parziale dato dalla cifra 4 del moltiplicatore si è cominciato dalla cifra 5 del moltiplicando la quale si trova al di sopra di 4 nella stessa colonna, e si è fatto così perchè 4 ch'è la cifra dei decimi del moltiplicatore moltiplicata per 17, 15 dà tre cifre decimali, quante appunto se ne cercano; quindi la prima cifra a destra di questo secondo prodotto parziale si è scritta sotto la prima a destra del primo. Parimente, passando all'altra cifra 2 del moltiplicatore, questa si è incominciata a moltiplicare per 1 che le sta immediatamente al di sopra, e la prima cifra a destra del terzo prodotto parziale si è similmente allogata nella prima colonna a destra. Fatta la somma dei tre prodotti parziali, e posta la virgola dove conveniva, si è avuto 58,661; da questo prodotto tolta la cifra 1 dei millesimi, si è trovato, come prima, 58,66.

[1] In verità non ci è un bisogno assoluto di scrivere le cifre del moltiplicatore in ordine inverso sotto quelle del moltiplicando, ma si ponno lasciare come stanno, badando però d'incominciare ciascun prodotto parziale da quella cifra del moltiplicando che dà quel dato numero di cifre decimali; ma ciò potrebbe imbarazzare non poco i principianti, laddove colla disposizione da noi indicata si troverà la debita cifra del moltiplicando immediatamente al di sopra di quella del moltiplicatore che dà il prodotto parziale.

Nel secondo esempio, invertendo l' ordine delle cifre nel moltiplicatore 72,34 si è avuto 4327; siccome nel prodotto si vuole la sola cifra dei decimi, si è posta la cifra 2 delle unità sotto quella dei centesimi del moltiplicando, e così tutte le altre cifre han preso rispettivamente il loro posto. Dopo ciò si è fatto il prodotto del moltiplicando per la prima cifra 7 del moltiplicatore, e siccome 7 esprime centinaia, si sono separate due cifre decimali nel prodotto, perocchè centinaia moltiplicate per millesimi, dànno centesimi. Si è poi continuata la moltiplicazione come nel primo esempio, e soppresso nel prodotto totale 225,83 la cifra 3 dei centesimi, si è ottenuto, come prima, 225,8.

197. Qualora le cifre dei due fattori siano di un numero considerevole, si comprende chiaramente che i prodotti delle cifre che si negligono in ciascun prodotto parziale porterebbero un' alterazione anche a quella cifra a cui bisogna arrestarsi. Per ovviare a questo inconveniente, si potrà modificare in due modi il procedimento indicato nel n.° precedente. Invece di porre la cifra delle unità sotto quella che segue la cifra voluta per ultima nel prodotto, si porrà sotto la seconda cifra seguente, e nel prodotto che si avrà, in cambio di sopprimere la sola ultima cifra decimale, si sopprimeranno le due ultime. Volendo operare in un altro modo, la cifra delle unità si disporrà sotto la seguente a quella cui fa d'uopo arrestarsi, e nei vari prodotti parziali, ciascuna cifra del moltiplicatore non s' incomincerà a moltiplicare da quella che le sta immediatamente al di sopra, ma da quella che è a destra di questa, considerandola aumentata di 1, se quella che la segue sia 5 o maggiore di 5; del prodotto però che si avrà da questa cifra non si riterranno se non le sole decine, aumentandole di 1, ove la cifra delle unità sia 5 o maggiore di 5. Il rimanente si troverà colla regola generale.

Per dissipare qualunque dubbio, applicheremo i due metodi ad un medesimo esempio, cioè al prodotto di 7,34572459 per 2,53, sostando alla cifra dei diecimillesimi.

7, 3457 2459			7, 3457 2459	
3 52			35 2	
14, 6914	48		14, 6914	5
3, 6728	60		3, 6728	6
2203	71		2203	7
18, 5846	79		18, 5846	8

La prima moltiplicazione a sinistra eseguita col primo metodo è troppo facile perchè punto non abbisogni di spiegazione; in quanto alla seconda, disposto il moltiplicatore come è prescritto dalla regola generale, in cambio di moltiplicare 2 per 2, cioè per la cifra che le sta immediatamente al di sopra, la si è moltiplicata per quella che sta a dritta di questa, aumentandola però di 1, perchè è seguita da 5, e si è detto 2 moltiplicato per 5 fa 10; di questo prodotto si è ritenuta la cifra delle decine, lasciandola qual è perchè è seguita da 0; questa ritenuta si è aggiunta al prodotto seguente $2 \times 2 = 4$ e si è avuto 15, e così 5 è stata la prima cifra a destra del primo prodotto parziale. Nello stesso modo si è operato pei rimanenti prodotti parziali.

198. L'ultima osservazione che faremo si è che talune volte le cifre del moltiplicando potrebbero essere troppo poche perchè quelle del moltiplicatore vi siano allogate al di sotto nel modo stabilito per ottenere una certa approssimazione; in questo caso si potranno scrivere a destra del moltiplicando gli zeri sufficienti.

199. Anco nella divisione ha luogo una semplicizzazione analoga, qualora bisogni arrestarsi nel quoziente ad una data cifra decimale.

Nel n.° 196 si è veduto che 58,662 è il prodotto abbreviato di 17,153 per 3,42; ora cerchiamo un metodo di abbreviazione col quale dato il prodòtto 58,662 e il fattore 17,153, si trovi l'altro fattore 3,42 con operazioni inverse di quelle indicate per abbreviare la moltiplicazione.

Per rendero visibilissime al lettore le relazioni delle due operazioni, noi le abbiam poste qui sotto l'una accanto l'altra.

Moltiplicazione	Divisiono	
17 , 153	58 , 662	17 , 153
245	7 , 203	3 , 42
51 , 459	343	
6 , 860	000	
0 , 342		
58 , 661		

Siccome la cifra 3 delle unità del moltiplicatore si è incominciata a moltiplicare per la cifra decimale seguente a quella che si voleva nel prodotto, cioè per quella dei millesimi, così nella divisione si considereranno anche tre cifre decimali, ed avuto il quoziente 3, per sottrarre dal dividendo il primo prodotto parziale del divisore pel quoziente, s'incomincerà a moltiplicar 3 per la cifra dei millesimi del divisore; sottratto il prodotto dal dividendo, otticnsi per primo resto 7, 203. Per trovare ora la cifra che segue quella avuta già del quoziente, cioè quella dei decimi, si osserverà cho nella moltiplicazione questa cifra si è incominciata a moltiplicaro per quella dei centesimi del divisore; dunque il fattore del secondo prodotto parzialo cho dovrà fare da divisore sarà 17, 15, cioè il divisore dato, soppressa la prima cifra a destra; diviso il primo resto 7, 203 per questo divisore, si ha per quoziento 4; por avero il secondo prodotto parziale, s'incomincerà la moltiplicaziono per 4 dalla cifra dei decimi 5 del divisoro; e sottratto il prodotto dal secondo dividendo parzialo, si ottieno il resto 343; questo resto si dovrà dividere pel divisore dato soppresse lo due primo cifre a destra, stante cho nella moltiplicazione la cifra dei centesimi del quoziente si è incominciata a moltiplicare per quella dei decimi del divisore. Fatta così la divisione, si ha 2 per quoziente, o fatto il secondo prodotto parziale, badando d'incominciare la moltiplicazione dalla cifra dei decimi, e di aumentaro di 1 il prodotto 2×1, perchè il prodotto della ci-

fra antecedente che si neglige è 10, e però è una decina che si dee lasciare qual è, essendo seguito da 0, si ha per resto 0; onde la divisione è terminata, e il quoziente è 3, 42, come si voleva.

Se si fossero trovati ancora altri resti successivi, sarebbonsi questi divisi, analogamente a ciò che si è veduto, pel divisore dato, soppresse le prime tre, quattro ec. cifre a sinistra; e la divisione dovrebbe sempre terminare quando fossero esaurite tutte le cifre del divisore.

200. Avendo ora compreso così la relazione ch'è tra le due operazioni, noi ridurremo a maggiore semplicità la regola per la divisione abbreviata. *Si uguaglino le cifre nelle parti decimali del dividendo e del divisore, si sopprima la virgola, e si scrivano a destra del dividendo tanti zeri quante cifre decimali si vogliono nel quoziente. Fatto ciò, si sopprimano a destra del dividendo tante cifre, meno una, quante sono quelle del divisore, e se così il dividendo non contenga più il divisore, si sopprima a destra di quest'ultimo un sufficiente numero di cifre; indi si esegua la divisione, la quale in quest'ultimo caso non darà che una sola cifra al quoziente. E nell'uno e nell'altro caso, continuando la divisione, i successivi dividendi parziali non si dividano per l'intero quoziente, ma per questo quoziente, soppressavi successivamente una cifra a destra, coll'avvertenza di tener conto nei prodotti parziali delle decine provenienti dal prodotto dell'ultima cifra che si sopprime, aumentando anche di 1 queste decine se la cifra dell' unità sia 5 o maggiore di 5. Terminata la divisione, il che dee al più avvenire quando siano esaurite tutte le cifre del divisore, si separino tante cifre decimali a destra del quoziente trovato quante se ne domandano.*

Sarebbe superfluo il perder tempo a riportare esempi di questa regola, essendo ella assai chiara per sè medesima.

Riduzione di una frazione ordinaria in frazione decimale, e viceversa.

201. Si è veduto fin qui quanto il calcolo delle frazioni decimali vinca di speditezza e facilità quello delle frazioni ordinarie, onde se si abbiano a calcolare più frazioni ordinarie sarebbe assai più comodo se queste potessero tutte cangiarsi in altrettante frazioni

decimali equivalenti; ora questo è appunto il costume che si ha nelle matematiche allorchè siasi in necessità di eseguire calcoli intricati e lunghi, e però di gran momento è il problema di cui ora ci occuperemo, cioè *ridurre una data frazione ordinaria in frazione decimale.*

Questo problema è un caso particolare di quello già risoluto nel n.° 165 ove si ha per obbietto di ridurre una frazione ad un'altra di dato denominatore; solo però qui non è dato proprio di grandezza il denominatore, ma n' è assegnata solamente la specie: così non si vuole ch' esso sia o 10 o 100 o 1000, ec., ma che sia generalmente l' unità seguita da uno o più zeri. Ora si è veduto nel n.° citato che in un sol caso è possibile il problema: quando il denominatore dato sia un multiplo del denominatore della frazione ridotta a minimi termini; nel caso nostro il denominatore dato è una potenza qualunque di 10, e questa non ha altri fattori primi se non 2 e 5; dunque è facilissimo di stabilire la seguente regola: *Per conoscere se una data frazione ordinaria si possa convertire esattamente in decimali, la si riduca, se già non sia irriducibile, a minimi termini, se il denominatore non contenga altri fattori primi che 2 o 5, o in altri termini non sia che una potenza di 2, o una potenza di 5, o il prodotto di due potenze di questi numeri, la frazione si potrà convertire esattamente in decimali; e il numero delle cifre decimali sarà espresso dal maggiore dei due esponenti di 2 e 5. In caso contrario la frazione proposta non si potrà ridurre in decimali, se non per approssimazione.*

Sia da ridursi $\frac{3}{4}$ in decimali; si vede *a priori* dalla regola stabilita che il problema è possibile, perchè il denominatore 4 è uguale a 2^2. L' operazione si disporrà e procederà nel modo che segue

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \end{array}$$

Poichè $\frac{3}{4}$ altro non è che il quoziente di 3 diviso per 4, noi opereremo questa divisione, dicendo: la quarta parte di 3 non può

essere un numero intero, dunque porremo 0 nel quoziente per la parte intera della frazione decimale che si cerca; ma il numero intero 3 è lo stesso che 30 decimi, e la quarta parte di 30 decimi è 7 col resto 2; dunque porremo 7 al posto dei decimi del quoziente; i 2 decimi che sonosi trovati per resto sono lo stesso che 20 centesimi, che divisi per 4 dànno esattamente 5 che scriveremo nel quoziente per cifra dei centesimi, e 0, 75 sarà il quoziente cercato di 3 per 4, sicchè si avrà $\frac{3}{4} = 0,75$. Le cifre decimali sono state due, cioè, secondo che si è detto nella regola, quante sono le unità dell'esponente di 2; infatti la potenza di 10 della quale 2^2 sia divisore esatto è 100; dunque nella divisione, dovendosi scrivere due zeri a destra del dividendo 3, questi daranno due cifre decimali al quoziente.

In sostanza l'operazione si è ridotta a quella del n.° 165: si è stabilito colà che il numeratore si dee moltiplicare pel denominatore dato, e poi dividere il prodotto pel denominatore della frazione; ora essendo 100 la prima potenza di 10 di cui 4 è divisore esatto, si ha, moltiplicando 3 per 100, il numero 300 che diviso per 4 dà 75; ora dovendosi dividere, secondo che si è stabilito nel n.° citato, 75 per 100, si separeranno due cifre e si avrà 0, 75.

Si può dunque avere la regola seguente: *Per convertire una frazione ordinaria in frazione decimale, si divida il numeratore pel denominatore; se la frazione sia spuria, sarà il dividendo maggiore del divisore, e però si avrà una o più cifre nella parte intera del quoziente, se sia vera si scriverà zero nella parte intera del quoziente, e posto uno zero a destra del dividendo, si farà la divisione di questo pel divisore e si avrà la cifra dei decimi; indi nell'un caso e nell'altro, si scriva sempre uno zero a destra dei resti successivi, e dividendoli pel divisore, si avranno successivamente le cifre decimali del quoziente. Quando si sappia che la frazione proposta è convertibile esattamente in decimali, si continui la divisione, finchè si abbia un resto uguale a zero; quando sappiasi che non è, siccome l'operazione mai non si esaurirebbe, si protragga la divisione fino alla cifra decimale che si cerca nel quoziente.*

202. Abbiasi a ridurre in decimali $\frac{3}{7}$; non adempiendo il denomina-

tore alle condizioni stabilite, la frazione, essendo irriducibile, non si può convertire in decimali, se non per approssimazione, e si comprende che tanto più oltre sarà spinta l' approssimazione, quante più cifre decimali si considereranno, ed arrestandosi il quoziente ad una di esse, l'errore sarà minore di una unità dell' ordine di quella cifra. Ora si esegua l' operazione nel modo indicato dalla regola.

```
30      | 7
 20     | 0,4285714....
  60
   40
    50
     10
      30
```

Dopo sei divisioni parziali si ha per resto 3, e quindi si avrà 30 per settimo dividendo parziale, cioè si avrà nuovamente il primo dividendo parziale; dunque è chiaro che dovendosi ripetere successivamente le medesime operazioni, si avranno gli stessi resti di prima e però i medesimi dividendi parziali e nello stesso ordine; adunque le sei cifre del quoziente trovate prima che ritornasse il dividendo parziale 30, si ripeteranno sempre nel quoziente *periodicamente e nello stesso ordine*.

Ciò poteva anche vedersi *a priori;* non potendo mai aver fine la divisione, per non essere la frazione convertibile in decimali, a ciascuna divisione parziale si dee avere un resto; tutti questi resti dovendo essere minori del quoziente, non ponno essere differenti l' un dall'altro, ma al più dopo tante divisioni parziali, quante unità sono nel divisore, meno una, si dovrà ricadere sopra uno dei resti precedenti, ed allora è chiaro che le operazioni parziali essendo le medesime di prima a partire dallo stesso resto di prima, si troveranno periodicamente al quoziente le stesse cifre e nello stesso ordine; tutte queste cifre costituiscono ciò che suol dirsi *periodo*, e noi l' indicheremo col rinchiuderlo fra due parentesi. Se il dividendo parziale che ritornerà sarà il primo donde si è incominciata la divisione, il periodo principierà dalla

prima cifra decimale e *il periodo potrà avere al più tante cifre decimali quante unità sono nel divisore meno una;* in tal caso la frazione decimale dicesi semplicemente *periodica*. Se il dividendo parziale che ricomparisce non è il primo, allora il periodo non incomincerà dalla prima cifra decimale, ma vi saranno alcune cifre antecedenti che non entreranno nel periodo: la frazione $\frac{5}{12}$ ce ne presenterà un esempio

```
50   |  12
 20  |0, 4166....
  80 |
   80|
```

Il resto terzo si ripete continuamente, onde il periodo è di una sola cifra ch'è 6, ed incomincia alla terza cifra decimale; le due antecedenti formano il numero 41 che non entra nel periodo; queste tali frazioni si dicono *periodiche miste*. Indicheremo nel n.° seguente a quali segni si può conoscere se una data frazione ordinaria non convertibile in decimali dia una frazione decimale periodica o periodica mista.

Quando dunque in queste due specie di frazioni siasi trovato il periodo, sarà inutile di continuare la divisione, perchè si sa quali sono le cifre decimali seguenti; volendo sostare ad una certa cifra decimale, si avrà la solita avvertenza, per fare il minimo errore, di aumentare di 1 questa cifra se la seguente sia 5 o maggiore di 5.

Dopo ciò si comprende come si può eseguire la divisione delle frazioni decimali quando il dividendo sia minore del divisore; uguagliate le cifre decimali e soppresse le virgole, risulteranno due numeri interi, dei quali il minore è il dividendo; l'operazione dunque si ridurrà a convertire una frazione ordinaria in decimali.

In ultimo faremo notare una semplicizzazione che potrebbe aver luogo nella divisione dei decimali quando il divisore o sia intero od abbia meno cifre decimali che il dividendo. Nel primo caso

sarà inutile di uguagliare le cifre decimali, ma si dividerà la parte intera del dividendo pel divisore, e si avrà così o zero o alcune cifre significative nella parte intera del quoziente; indi invece dei primi zeri che bisognerebbe scrivere a destra dei resti successivi si prenderanno successivamente le cifre decimali del dividendo. Nel secondo caso nemmeno si uguaglieranno le cifre decimali, ma, soppressa la virgola nel divisore, si avanzerà questa nel dividendo di tanti posti a destra quanti erano le cifre decimali del divisore, il che non altera il quoziente, e così si rientrerà nel caso precedente in cui il divisore era un numero intero.

203. *Qualora una frazione ordinaria non convertibile in decimali non abbia nel denominatore nè 2 nè 5 per fattore, il periodo incomincerà dalla prima cifra decimale.*

Infatti supponiamo che riducendo in decimali $\frac{3}{7}$ i due resti 5 e 2 dando i dividendi parziali 50 e 20, abbiano forniti due resti uguali; togliendo 20 da 50 questi resti si distruggeranno, e la differenza 50—20 dovrà esser divisibile per 7; ora questo è impossibile perchè i resti 5 e 2 sono minori del divisore 7, e 7 per ipotesi non ha per suoi fattori nè 5, nè 2; dunque due resti disuguali non ponno dare lo stesso resto; dal che vedesi che in questo caso ottenendo due resti uguali, i resti precedenti han dovuto essere parimente uguali; il qual ragionamento ci farà risalire fino al primo resto, e così il periodo non può cominciare che alla prima cifra decimale.

Al contrario *se il denominatore della frazione data contenga potenze di 2 o di 5, il periodo sarà preceduto da tante cifre decimali quante unità si trovano nel maggiore dei due esponenti di 2 e di 5.*

Abbiasi a convertire in decimali la frazione $\frac{3}{280}$; scomponendo il denominatore nei suoi fattori primi, si ha $\frac{3}{2^3.5.7}$; ora io dico che il periodo sarà preceduto da tre cifre decimali, essendo 3 il più alto esponente dei fattori 2 e 5. La frazione proposta si può scrivere $\frac{1}{2^3.5} \times \frac{3}{7}$; il primo fattore è convertibile in decimali, e dà tre cifre decimali, cioè 0, 025, la seconda dà la periodica 0,

(428571); il prodotto di queste due frazioni decimali è uguale alla proposta; ora nell'eseguire la moltiplicazione della frazione periodica per 25, è chiaro che si troverà nel prodotto uno stesso numero di cifre ripetuto periodicamente, e solo alcune prime cifre a sinistra non entreranno nel periodo; di tutto ciò sarà facilissimo convincersi, scrivendo un certo numero di volte il periodo del moltiplicando e moltiplicandolo per 25. Ora essendo il periodo del prodotto dello stesso numero di cifre che quello del moltiplicando, si vede che separando a destra del prodotto tante cifre decimali, quante ce n' hanno nel moltiplicando, le prime cifre a sinistra che abbiamo detto non entrar nel periodo, staranno nella parte intera, e si avrà così una frazione decimale periodica; ma in questo prodotto si debbono ancora separare tre cifre decimali, cioè si dee far retrocedere la virgola di tre posti a sinistra, perchè il moltiplicatore non dev'essere 25, ma 0, 025; dunque il periodo sarà preceduto da tre altre cifre decimali, come appunto si voleva dimostrare.

204. Qualora cangiando una frazione ordinaria in decimali, si trovi nel periodo il massimo numero di cifre, cioè tante quante sono le unità del denominatore, meno una, se abbiasi un'altra frazione di medesimo denominatore, ma di numeratore minore di questo denominatore, siccome il numeratore di quest'ultima trovasi tra i resti successivi ottenuti nel convertire la prima in decimali, così il periodo della seconda frazione sarà composto delle ultime cifre del periodo della prima, incominciando dalla prima cifra della seconda. Così, convertendo in decimali $\frac{5}{7}$ si ha 0,(714285); ora, volendo convertire $\frac{3}{7}$ in decimali, siccome fra i resti della prima divisione si trova necessariamente 3, e quindi il dividendo parziale è 30, così il primo della seconda frazione incomincerà dalla cifra decimale data da 30, ch'è 4, e le altre per conseguenza saranno quelle che seguono 4 nel primo periodo; sicchè si avrà $\frac{3}{7}$= 0, (4285).

Ma se la prima frazione non conterrà nel periodo tutte le cifre che può avere, allora il numeratore della seconda, benchè mino-

re del denominatore, non si troverà necessariamente fra i resti della prima divisione; quando però ci si trovi, avverrà sempre il medesimo di prima.

205. Allorchè si conosca il periodo che dà una frazione ordinaria, che abbia per numeratore l'unità per avere il periodo di ogni altra frazione, che abbia lo stesso denominatore, basterà moltiplicare il periodo della prima pel numeratore della seconda. Così essendo $\frac{1}{37} = 0,27$, per avere il periodo di $\frac{5}{37}$, si moltiplicherà per 5 il periodo di $\frac{1}{37}$, e si avrà $\frac{5}{37} = 0,135$.

Questa osservazione può dar luogo ad una grande semplicizzazione nello svolgere in decimali una frazione ordinaria che abbia per numeratore l'unità. Per esempio $\frac{1}{19}$ dà nel quoziente la parte 0,05263 col resto 3; adunque il rimanente dell'operazione si riduce a convertire in decimali $\frac{3}{19}$, il che, per la nostra osservazione, si fa moltiplicando per 3 la parte già trovata nel quoziente; si ottiene così 15789 che bisognerà scrivere a destra della parte già trovata; avendo triplicati i dividendi parziali, i resti sono stati medesimamente triplicati, onde il resto che si ha dopo la seconda operazione è 3×3, cioè 9; dunque, avendo ancora a convertire in decimali $\frac{9}{19}$, si moltiplicherà per 9 tutto il quoziente trovato, o che vale lo stesso, per 3 la seconda parte ultimamente ottenuta, e così di seguito. Ecco la maniera onde si dispone l'operazione:

$$\frac{1}{19} = 0,05263$$

prod. del prec. per 3............15789
prod. del prec. per 3..................47367
prod. del prec. per 3......................1 421 01
prod. del prec. per 3............................4 26.....

$$\frac{1}{19} = 0,(05263\ 15789\ 47368\ 421)\ 05\ 26.....$$

Ogni moltiplicazione per 3 aggiunge al periodo cinque cifre; onde nello scrivere i prodotti di sei cifre, abbiam posto la prima cifra a sinistra sotto la prima a destra del prodotto precedente.

206. Supponiamo che una frazione ordinaria la quale abbia per numeratore l'unità, per esempio, $\frac{1}{13}$, ridotta in decimali, dia un resto uguale al denominatore, meno uno, cioè 12, che si ha dopo sei divisioni; e il quoziente è 0, 076. La continuazione dell'operazione, si ridurrà a convertire in decimali $\frac{12}{13}$, ovvero $\frac{13-1}{13} = 1 - \frac{1}{13}$; avendo già trovato nel quoziente $\frac{1}{13}$ la parte 0, 076, bisognerà sottrarla da 1, cioè prendere i complementi di tutte le sue cifre a 9, ovvero 923; onde sarà $\frac{1}{13} = 0,076923$; ora io dico che così riman compiuto il periodo. Infatti, poichè 10^3 diviso per 13 ha dato il resto 12, 10^3+1 dovrà dare il resto 13, cioè 0, per essere 13 il divisore; così dunque $\frac{10^3+1}{13}$ è un numero intero, e moltiplicando per 10^3-1, il prodotto $\frac{10^6-1}{13}$ dev' essere parimente un numero intero, cioè $\frac{10^6}{13}$ dee dare per resto 1; in questo modo, riproducendosi il primo dividendo parziale 10, le cifre del quoziente già trovate che sono sei, perchè 10 è ricomparso dopo la sesta divisione, ritorneranno collo stesso ordine, e però il periodo avrà sei cifre.

Qualora il periodo contenga tante cifre quante sono le unità del denominatore meno una, quello che si è qui detto avrà sempre luogo, perchè si troveranno, quantunque con ordine differente, i resti 1, 2, 3, 4... fino al denominatore della frazione, meno uno. Ottenuto dunque che si sarà un tal resto, in cambio di continuare l'operazione nel modo consueto, si prenderanno per le rimanenti cifre del periodo i complementi a 9 di quelle già trovate, e così l'operazione verrà ridotta a metà; il che sarà tanto più utile, quanto maggiore sarà il numero delle cifre nel periodo.

207. Passeremo ora alla soluzione del problema inverso di quel-

lo trattato sino qui, cioè *data una frazione decimale, trovare la sua generatrice ordinaria*. Due casi possono darsi: o la frazione decimale data sarà esattamente uguale alla sua generatrice ordinaria, o no; nel primo caso la frazione decimale non conterrà periodo, nel secondo sarà periodica, o periodica mista.

1.° Supponiamo in primo luogo che la frazione decimale data sia esattamente uguale alla sua generatrice ordinaria; allora *si scriva la frazione decimale data alla maniera ordinaria, e si eseguano le semplicizzazioni che avranno luogo*; così per 0, 32 si avrà $\frac{32}{100}=\frac{8}{25}$.

2.° Se si avrà una frazione decimale periodica, si osserverà che svolgendo in decimali le frazioni $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999} \ldots$ si hanno rispettivamente 0, (1), 0, (01), 0, (001)... Ora di questi valori moltiplicando il primo per un numero semplice, si ha una frazione periodica, il cui periodo ha solo quella cifra, moltiplicando il secondo per un numero di due cifre, si avrà una frazione periodica che avrà per periodo quelle due cifre, e così di seguito. Dunque avendo la frazione 0, (27), questa può considerarsi come il prodotto di $\frac{1}{99}$ per 27, ovvero $\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$; parimente $0,(6)=\frac{6}{9}=\frac{1}{3}$, ec. Dunque per risalire da una frazione *decimale periodica alla generatrice ordinaria, bisognerà dividere il periodo pel numero rappresentato da tanti 9 quante sono le cifre di esso periodo.*

Si troverà subito con questa regola $0, (0048) = \frac{48}{9999}=\frac{16}{3333}$, $0, (5423)=\frac{5423}{9999}=\frac{493}{909}$; $0, (571428)=\frac{571428}{999999}=\frac{4}{7}$, $0\ 036 = \frac{36}{999}=\frac{4}{111}$.

3.° In ultimo sia data una frazione periodica mista: per esempio, 0, 28 (342); si trasporti la virgola al principio del periodo, e si avrà 28, (342) ch'è centupla della proposta; essendo quest'ultima una frazione periodica, la sua generatrice ordinaria, per quello che or ora si è stabilito, è $28+\frac{342}{999}$, o riducendo intero e frat-

to ad un sol fratto ed indicando le operazioni, $\frac{28\times999+342}{999}$; questa frazione, secondo che abbiamo detto, è centupla della proposta; dunque dividendola per 100, cioè moltiplicando per 100 il denominatore, le sarà uguale; si ha così $\frac{28\times999+342}{99900}$; ora al numeratore in cambio di 28×999, si ponga $28\times(1000-1)$, ovvero $28000-28$; così il numeratore si ridurrà a $28000-28+342$, ed eseguendo l'addizione di 28000 con 342, si avrà $28342-28$; sicchè finalmente sarà $0,28\,(342)=\frac{28342-28}{99900}=\frac{1573}{5550}$. Dall'ispezione della frazione $\frac{28342-28}{99900}$ si può stabilire la regola seguente:

Per avere di una data frazione decimale periodica mista la corrispondente ordinaria; si formerà una frazione che abbia per numeratore un numero rappresentato dalle cifre che precedono il periodo con accanto quelle ch'entrano nel periodo; e per denominatore un numero rappresentato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo con accanto tanti zeri quante sono le cifre che precedono il periodo.

CAPITOLO VI.

POTENZE E RADICI.

Elevamento a potenza.

208. A completare lo studio del calcolo aritmetico, di due altre operazioni ci rimane a trattare, cioè sono l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice; or questo appunto sarà l'argomento del presente capitolo.

Le potenze successive di un numero si ottengono moltiplicando successivamente questo numero una volta, due volte, tre volte, ec. per sè medesimo. Nel quadro seguente si veggono le prime nove potenze dei numeri semplici, dei quali debbonsi almeno recare a memoria i quadrati e i cubi. Si potrà osservare in questo quadro con quale rapidità van crescendo le potenze di uno stesso numero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65538	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	277936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16767216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43056721	387420489

La 2ª, 3ª, 4ª... potenza di una frazione si ottiene, moltiplicando una, due, tre, quattro... volte questa frazione per sè me-

desima; ora il prodotto di più frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori dei fattori; dunque, osservando che nel nostro caso i fattori sono uguali, si stabilirà che *una potenza di una frazione è un'altra frazione che ha per suoi termini i termini della prima elevati a quella stessa potenza.* Così $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^3=\frac{2^3}{7^3}=\frac{8}{343}$. Si noti che un potenza di una frazione vera è tanto minore di questa frazione, quanto maggiore è il grado di essa potenza.

L' elevamento a potenza potrebbe in alcuni casi semplicizzarsi, quando si conoscessero alcune potenze del numero dato di grado inferiore a quella che si domanda. Così sapendo a memoria i quadrati e i cubi dei numeri semplici, le altre potenze si otterranno più semplicemente che con la moltiplicazione reiterata di questo numero per sè medesimo. Per esempio, volendo la quarta potenza di 5 si moltiplicherà 5 pel suo cubo, perchè infatti si sa dal n.° 134 che $5^3\times5=5^4$; parimente la quinta potenza di 5 si otterrà moltiplicando il cubo di 5 per il suo quadrato, perchè $5^3\times5^2=5^5$: La sesta potenza si otterrà col prodotto di due cubi, perchè $5^3\times5^3=5^6$; in simil modo per la settima potenza si osserverà che $5^3\times5^3\times5=5^7$; per l' ottava che $5^3\times5^3\times5^2=5^8$; per la nona che $5^3\times5^3\times5^3=5^9$, e così seguitando.

Se vogliasi elevare 5^3 a quadrato, si avrà $5^3\times5^3=5^6$, se a cubo, $5^3\times5^3\times5^3=5^9$; dal che si vede che potrebbesi anche ove sia possibile, scomporre l'esponente della potenza nei fattori 2 e 3 ed elevare successivamente il numero proposto a quadrato o a cubo. Per 5^4 si farà $4=2\times2$; onde si avrà successivamente $5^2=25$, $25^2=625$; dunque $5^4=625$. Per 5^{12}, essendo $12=2\times2\times3$, si farà $5^2=25$, $25^2=625$, $625^3=24410625$.

Estrazioni di radici quadrate.

209. 1° CASO. Quando il numero dato non abbia più di due cifre, l'estrazione della radice quadrata non può considerarsi come una operazione, sapendosi ella fare a memoria; così se vogliasi la radice quadrata di 36, si sa dal n.° 133 ch'ella è di una sola cifra,

e siccome i quadrati dei numeri semplici si sanno a memoria, così zi farà subito $\sqrt{36} = 6$.

Abbiasi ad estrarre la radice quadrata da 28; qui pure la radice non può essere di più di una cifra. Ora tra i quadrati dei numeri semplici non ci ha il numero 28, perocchè dopo di 25 quadrato di 5 si trova 36 quadrato di 6; dunque la radice quadrata di 28 è maggiore di 5 e minore di 6, e però non può essere un numero intero, perchè tra i due numeri interi consecutivi 5 e 6 non ci è altro numero intero. Parrebbe dunque che la radice quadrata che si cerca fosse uguale a 5 più una frazione, o che torna lo stesso, ad una frazione spuria maggiore di 5 e minore di 6. Ma supponiamo che questa frazione sia ridotta a minimi termini; questi termini saranno due numeri primi fra loro; il quadrato di questa frazione avrà per suoi termini i quadrati dei termini della prima; questi ultimi, per ipotesi sono due numeri primi; dunque anche i loro quadrati sono primi fra loro (121). Da ciò si vede che il quadrato della frazione supposta radice quadrata di 28 elevata a quadrato non potrebbe essere uguale a 28, cioè ad un numero intero, perchè si richiederebbe per avvenir questo che il numeratore fosse divisibile esattamente per il denominatore, il che non potrebbe mai avvenire per essersi dimostrati i due termini primi fra loro. S' inferisce da ciò che la radice di 28, cioè generalmente di ogni numero che non sia quadrato perfetto, non può essere nè un numero intero, nè un numero fratto. Il ragionamento sarebbe affatto simile per ogni altro numero intero che non sia una potenza perfetta dell' ordine indicato dall' indice della radice che se ne vorrebbe estrarre; e si conchiuderebbe che quella tale radice del numero proposto non è nè un intero, nè un fratto. Ora quando si stabilisce una unità, le quantità che sono commensurabili con l' unità, espresse in numeri per mezzo di essa, o sono rappresentate da un numero intero o da un fratto; ma si è dimostrato che le radici dei numeri che non siano quelle tali potenze perfette indicate dagl' indici di queste radici, non ponno essere rappresentate nè da numeri interi, nè da fratti; dunque queste tali quantità sono incommensurabili con l' unità ch' è quanto dire non ponno essere espresse in numeri per mezzo di essa. Solo cangiando l' unità, la cui scelta è arbitraria, queste quantità potrebbero essere espresse esattamente in numeri.

Ed ecco dimostrato che quando si stabilisce una unità, ci hanno sempre delle quantità incommensurabili con questa unità. Questa è una legge che ha la sua ragione nella natura stessa della quantità, e di cui qui non abbiam fatto se non dimostrare l'esistenza, ma l'intimo perchè della sua essenza, come abbiam detto altra volta, non ci può esser mai dato d'indagarlo.

Ritornando dunque all'esempio della radice quadrata di 28, questa non potrà trovarsi se non per approssimazione, perchè quando una quantità incommensurabile si voglia esprimere in numeri, il che non può farsi che approssimativamente, si prende una parte aliquota dell'unità, e si vede il massimo numero di volte che questa grandezza contiene quella data parte aliquota, e così disprezzando il resto, la quantità è espressa approssimativamente in numeri per mezzo dell'unità stabilita; l'errore poi sarà minore di quella parte aliquota dell'unità che si è presa per comune misura, e sarà tanto minore quanto più piccola sarà questa comune misura [1]. Se vogliamo prendere per comune misura l'unità si avrà $\sqrt{28}=5$, e l'errore sarà minore di una unità. Tratteremo poco appresso dei procedimenti che si dovranno seguire per ottenere maggiori approssimazioni.

210. 2° Caso. Passeremo ora al caso in cui la radice quadrata abbia due cifre; secondo il n.° 133 ciò avviene sempre che il quadrato abbia tre o quattro cifre. Le operazioni che si eseguiranno per trovare la cifra delle decine e delle unità della radice quadrata saranno inverse di quelle che si farebbero su queste due cifre per ottenere il quadrato. Vediamo adunque in che modo si trovano fuse queste cifre nel quadrato. Eleviamo a quadrato il numero 73, e distinguendo le decine dalle unità, scriviamo $70+3$; per quello che si è dimostrato col n.° 135 si avrà $(70+3)^2=70^2+2\times70\times3+3^2$; eseguiamo qui appresso le operazioni indicate nel secondo membro.

[1] Il lettore sarà meglio in grado di comprenderci se si trova conoscere il procedimento geometrico onde si determina la comune misura tra due linee rette; per il quale noi lo indirizziamo alla *Geometria* del Legendre nell'ultimo dei problemi relativi al secondo libro.

$$\begin{array}{rcr} 70^2 & = & 4900 \\ 2\times70\times3 & = & 420 \\ 3^2 & = & 9 \\ \hline 73^2 & = & 5329 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5329 & 73 \\ 49 & 14\ 3 \\ \hline 42.9 & \quad\ 3 \\ \hline 42\ 9 & 42\ 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

La somma delle tre parti che si veggono nel secondo membro è 5329, sicchè si ha $73^2 = 5329$. Suppongasi ora che da 5329 si voglia estrarre la radice quadrata; per confrontare le due operazioni abbiamo eseguita la seconda a destra della prima. Essendo quattro le cifre del numero proposto, la sua radice quadrata ha due cifre. Per trovare quella delle decine, si osserverà, per la operazione fatta innanzi, che il numero proposto contiene il quadrato di queste decine, e di più che siccome il quadrato delle decine non può contenere che centinaia, così nelle 53 centinaia del numero proposto è contenuto il quadrato in quistione. Separeremo dunque con un punto le centinaia del numero proposto, e diremo: il massimo quadrato contenuto in 53 è 49, la cui radice è 7; scriveremo dunque 7 a destra del numero proposto per la cifra cercata delle decine. Eleveremo 7 a quadrato ed avremo 49 che scritto sotto 53, ne lo sottrarremo, ed avremo per resto 4; è chiaro dall' operazione eseguita a sinistra che questo 4 esprime le centinaia del doppio prodotto delle decine per l' unità. Resta ora a trovare la cifra delle unità. Per far ciò, abbasseremo a destra del residuo 4 le rimanenti cifre del numero proposto, ed avremo 429; questo numero è nato dal sottrarre dal numero proposto il quadrato delle decine della sua radice quadrata; esso dunque contiene il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Ora osserveremo nella prima operazione che questo doppio prodotto non ha cifre significative di un ordine inferiore alle decine; dunque posto un punto dopo le decine del numero 429, è certo che nella parte 42 è contenuto questo doppio prodotto; dunque se si divide 42 pel doppio delle decine trovate, cioè per 14, che si vede scritto a destra di 429, il quoziente sarà la cifra delle unità che si cercano; questa divisione dà il quoziente 3. Per vedere se veramente 3 è la cifra che si cerca, la si scriverà accanto di 14 e si moltiplicherà il numero 143 che ne

risulta per 3; così, essendo 14 il doppio delle decine e 3 le unità, il prodotto sarà il doppio delle decine per le unità, più il quadrato delle unità; ma a questa somma si è veduto essere uguale 429; dunque il prodotto dee essere uguale a 429; or questo appunto è il risultamento dell'operazione; dunque 3 è la cifra delle unità, e 73 la radice quadrata che si cerca.

Se il prodotto 143×3 fosse stato minore di 429, togliendolo da 429, sarebbesi avuto un resto, il che avrebbe indicato che il numero proposto non era un quadrato perfetto; allora prendendo 73 per la radice cercata sarebbesi errato, come si è veduto innanzi, per meno di una unità.

Per un altro esempio, abbiasi ad estrarre la radice quadrata da 5023.

```
50.23 | 69
36    |----
----- | 129
142.3 |   9
116 1 |----
----- | 1161
 26 2 |
```

Si separeranno, come prima, con un punto le due prime cifre a destra; il massimo quadrato contenuto in 50 è 49, la cui radice quadrata è 7; ora tolto 49 da 50 si ha il resto 1 a destra del quale scritte le rimanenti cifre del numero proposto, si ha 123, e separata con un punto la prima cifra a destra, 12 non si può dividere per 14, cioè pel doppio delle 7 decine trovate. Sempre che questo avviene si può esser sicuri di un resto; infatti si comprende che la cifra delle decine cercate non è 7 ma minore di 7, e che le centinaia del numero proposto contengono oltre il quadrato delle decine, un numero di centinaia tali che aggiunte a quel quadrato, han fatto contenere alle centinaia del numero proposto un quadrato maggiore. Ora è facile vedere che una tale alterazione non può mai venire dalle centinaia che si riportano dalla somma del doppio prodotto delle decine per le unità e dal quadrato delle unità; dunque quest' alterazione è provenuta dallo aggiungere alcune altre centinaia a quelle dette ora; e però rimane dimostrato l'esistenza di un resto.

Noi dunque invece di 7 prenderemo 6 per cifra delle decine della radice; ne sottrarremo il quadrato 36 da 50, ed avremo il resto 14, a destra del quale scriveremo le rimanenti cifre del numero proposto; dal numero 1423 che ne risulta separeremo con un punto la prima cifra a destra, e divideremo 142 per 12, cioè per il doppio della cifra trovata; il quoziente è 9; moltiplicheremo dunque, come prima, 129 per 9, e sottratto il prodotto 1161 da 1423. si ha il resto 262. Adunque la radice del numero proposto è compresa tra 69 e 70, e quindi prendendo 69 per questa radice l'errore sarà minore di una unità.

Un' altra avvertenza che si dee avere in questa operazione ha luogo nell' esempio che segue.

$20^2=400$	7.84	28	
$2\times20\times8=320$	4		
$8^2=\ 64$	38.4	49	48
$28^2=784$	38 4	9	8
	0	441	384

Il numero 784 è il quadrato di 28 come si vede nell' operazione eseguita a sinistra; ora eseguiamo col procedimento stabilito la radice quadrata da 784; separate le due prime cifre a destra, diremo: il massimo quadrato contenuto in 7 è 4, la cui radice quadrata è 2; da 7 tolto 4 resta 3, accanto di cui si abbasserà 84, e separata la cifra delle unità, si dividerà 38 per 4, cioè pel doppio della cifra trovata; il quoziente è 9. Ora moltiplicando, come prima 49 per 9 si ottiene 441 ch' è maggiore di 384; dunque la cifra delle unità non è 9. La ragione di ciò si vede nella prima operazione a sinistra: il prodotto del doppio delle decine per le unità è 32, che diviso per 4, dà 8 per cifra delle unità; ma a queste 32 decine aggiunte le sei del quadrato delle unità, si sono avute nella somma 38 decine che han contenuto una volta di più il doppio delle decine, e però han dato 9 per quoziente. Noi dunque prenderemo 8 per cifra delle unità, e moltiplicando 48 per 8, avremo 384 che sottratto dà 384, dà zero; donde conchiuderemo che $\sqrt{784} = 28$.

211. 3° Caso. In ultimo tratteremo il caso in cui la radice qua-

drata abbia un numero qualunque di cifre. Sia 386 questa radice; noi vedremo, come nel caso precedente in che modo queste cifre si troveranno fuse nel quadrato. Faremo $386=380+6$, cioè distingueremo sempre le decine dalle unità, e però $386^2=(380+6)^2=380^2+2\times380\times6+6^2$. Eseguiamo qui sotto a sinistra le operazioni indicate nel secondo membro.

$$\begin{array}{r} 380^2=144400 \\ 2\times380\times6=4560 \\ 6^2=36 \\ \hline 386^2=148996 \end{array}$$

```
14.89.96 | 386
 9       |-------
 ----    |
 58.9    |  69   68
  544    |   9    8
 ----    |  ---  ---
 459.6   |  621  544
 459 6   |  766
 ----    |    6
   0     | ------
         | 4596
```

Il numero 148996 da cui si cerca estrarre la radice quadrata ha sei cifre; quindi questa radice ne ha 3. Il numero dato contiene il quadrato delle decine, il quale non ha cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia; noi dunque separeremo come prima con un punto le due prime cifre a sinistra del numero dato, ed estraendo la radice quadrata, come nel caso antecedente, dalla parte 1489 avremo 38 per le decine cercate. Quest'operazione lascia il resto 45, il quale, com'è chiaro appartiene al prodotto del doppio delle decine per le unità; scrivendo dunque accanto di questo resto le rimanenti cifre del numero proposto, si ha 4596, da cui separata la cifra delle unità, si avrà la parte 459, nella quale è contenuto il prodotto del doppio delle decine, per le unità; dividendo dunque 459 pel doppio delle decine, cioè per 76 si avranno le unità della radice; il quoziente è 6, e moltiplicando 766 per 7, cioè formando il doppio prodotto delle decine per le unità, e il quadrato delle unità, si dovrà avere 4596, come infatti si trova. Se poi questo prodotto fosse stato maggiore di 4596, sarebbesi diminuito successivamente di 1 il primo quoziente trovato.

Se la radice avesse quattro cifre, dividendola similmente in decine ed unità, le decine avrebbero tre cifre, onde per trovarle,

separate dal numero proposto le due prime cifre a destra, dalla prima parte si estrarrebbe la radice, come s'è fatto or ora; indi abbassando a destra del residuo le due cifre separate a destra del numero proposto, e separata a destra del numero così ottenuto la prima cifra a destra, si dividerebbe la prima parte pel doppio delle decine trovate; e così di seguito. Laonde si può stabilire la regola seguente:

Per estarre la radice quadrata da un numero intero, si divida questo numero in classi di due cifre con vari punti, incominciando dalla destra; l'ultima classe potrebbe anche contenere una sola cifra. Si estragga la radice quadrata dal massimo quadrato contenuto in quest' ultima classe, e si avrà la prima cifra a sinistra della radice. Sottratto da questa classe il massimo quadrato anzidetto, si abbassi a destra del residuo, la classe seguente, e separata dal tutto la prima cifra a destra, si divida la prima parte pel doppio della cifra trovata nella radice, nel che si avrà l'avvertenza di non prendere un numero maggiore di 9 per quoziente; scritto il quoziente a destra del divisore, si moltiplichi il tutto per esso quoziente, e se il prodotto non sia maggiore di tutto il numero da cui si è preso il dividendo, lo si sottragga da questo numero; se sia maggiore, si diminuisca successivamente di 1 il quoziente trovato, finchè si giunga ad un prodotto minore. Fatta la sottrazione, si scriva a destra del residuo la classe seguente, e separata dal tutto la prima cifra a destra, si divida la prima parte pel doppio del numero trovato già nella radice; e così di seguito finchè siano esaurite tutte le classi del numero proposto. Se uno dei dividendi detti dianzi, non sia divisibile pel doppio del numero già trovato nella radice, si ponga 0 per quella cifra nella radice, e poi si continui l'operazione nel modo stabilito.

Qualora l'operazione lasci un resto, il numero proposto non è un quadrato perfetto, e però prendendo per radice di questo numero la radice trovata, l'errore sarà per meno di una unità.

212. Poichè il quadrato di una frazione si ottiene elevandone a quadrato il numeratore e il denominatore, viceversa, *per ottenere la radice quadrata di una frazione, si estrarranno le radici quadrate dal numeratore e dal denominatore*; così, $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{5}{9}$, $\sqrt{\frac{16}{49}}=\frac{4}{7}$.

Si vede da ciò che quando i termini della frazione non siano quadrati perfetti, non potendosi le loro radici quadrate esprimere in numeri esattamente, nè anche la radice quadrata della frazione potrà esprimersi in numeri, cioè sarà una quantità incommensurabile; laonde delle frazioni è a dire il medesimo che dei numeri interi, cioè le radici delle frazioni che non sono quelle potenze perfette indicate dagli indici di queste radici, sono quantità incommensurabili.

Abbiasi ad estrarre la radice quadrata da $\frac{5}{7}$; non essendo quadrati perfetti i termini di questa frazione, la sua radice quadrata non potrà ottenersi che per approssimazione; così, potrà estrarsi la radice quadrata per approssimazione dal numeratore e dal denominatore, mediante due frazioni decimali, come vedremo in appresso, e dividere poi l'una frazione per l'altra, spingendo l'operazione fino a quella cifra decimale che si desidera.

Ma per più semplicità si suole estrarre da un sol termine la radice per approssimazione, il che si fa riducendo a quadrato perfetto il denominatore, col moltiplicare ambi i termini della frazione per esso denominatore. Così la frazione $\frac{3}{5}$ si ridurrà a $\frac{15}{25}$, e quindi $\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$; si estrarrà dunque la radice quadrata da 15 con quella approssimazione che si voglia ed indi la si dividerà per 5.

Alcune volte il denominatore potrebbe ridursi a quadrato perfetto, moltiplicandolo per un numero minore che per sè medesimo; allora sarà più semplice di operare così. Per esempio, $\frac{3}{8}$ si ridurrà ad avere per denominatore un quadrato perfetto, moltiplicandone ciascun termine per 2, e verrà $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$; onde sarà, come prima, $\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

213. *Per estrarre la radice quadrata da una frazione decimale si*

renderà pari, se già non sia tale, il numero delle cifre decimali, collo scrivervi a destra uno zero, indi si estrarrà la radice quadrata dal numero rappresentato da tutte le cifre significative, e si separeranno in questa radice la metà delle cifre decimali del quadrato. Ove questa radice non possa estrarsi esattamente, disprezzando il resto, si errerà per meno di una unità dell'ultima cifra decimale della radice; e se vogliasi un'approssimazione maggiore, si renderanno le cifre decimali della frazione proposta di un numero doppio di quelle cercate nella radice, scrivendovi a destra un numero sufficiente di zeri, ed indi si opererà nel modo stabilito.

Abbiasi ad estrarre la radice quadrata da 0, 25; questa frazione si può scrivere $\frac{25}{100}$: il numeratore è un quadrato perfetto, al pari che il denominatore, perchè un numero rappresentato dall'unità seguita da un numero pari di zeri è sempre un quadrato perfetto; dunque si avrà $\sqrt{\frac{25}{100}}=\frac{5}{10}=0,5$.

Ma se si abbia 3, 045, scrivendo, come prima $\frac{3045}{1000}$, il denominatore non è un quadrato perfetto, ma lo si renderà tale scrivendovi un altro zero a destra, cioè moltiplicandolo per 10; lo stesso si dovrà fare al numeratore, a fine che la frazione non cangi, e si avrà $\sqrt{\frac{3045}{1000}}=\sqrt{\frac{30450}{10000}}=\frac{\sqrt{30450}}{100}$. Il numero 30450 non è un quadrato perfetto, e disprezzando il resto, la sua radice quadrata è 174; onde sarà $\sqrt{\frac{30450}{100}}=\frac{174}{100}=1,74$; dunque $\sqrt{3,045}$ $=1,74$.

È chiaro che qui l'errore è per meno di un centesimo; ma se l'approssimazione si volesse spingere più oltre, per esempio, fino ai diecimillesimi, siccome nella radice si cercano quattro cifre decimali, così nel quadrato ce ne vorranno otto, onde nella frazione proposta 3, 045 si scriveranno cinque zeri nella parte decimale, e si avrà 3, 04500000; la radice quadrata di 304500000 è 17449, disprezzando il resto; dunque $\sqrt{3,045}=1,7449$.

Dall'operazione stessa qui indicata si può vedere che per quante cifre si vogliano nella parte decimale, queste non potrebbero mai dare un periodo: ed infatti, se così fosse, la radice quadrata non sarebbe più, com'è per ipotesi, incommensurabile, perocchè ogni frazione decimale periodica, o periodica mista, è commensurabile con l'unità, avendo sempre la sua frazione ordinaria corrispondente (207).

214. *Per estrarre per approssimazione la radice quadrata da un numero intero che non sia quadrato perfetto, col mezzo dei decimali, si scriverà dopo di questo un numero di zeri doppio di quello delle cifre decimali che si vogliono nella radice, ed estratta la radice quadrata dal numero che ne risulta, disprezzando il resto, si separeranno in questa le cifre decimali cercate.*

Abbiasi ad estrarre la radice quadrata da 2 fino ai centomillesimi; 2 è lo stesso che 2, 0000000000; l'operazione dunque si riduce ad estrarre la radice quadrata da questa frazione decimale, e si ha 1, 41421.

215. Siccome le frazioni decimali sono più comode nel calcolo, così questa è la maniera più semplice di estrarre la radice quadrata per approssimazione; ma ella potrebbe anche ottenersi con una frazione ordinaria, perocchè la comune misura di questa radice coll'unità, disprezzando il resto, è ad arbitrio. Vogliasi, per esempio, $\sqrt{7}$ per meno di $\frac{1}{4}$; moltiplicando e dividendo 7 pel quadrato di 4, cioè per 16, si avrà $7=\frac{112}{16}$; onde $\sqrt{7}=\frac{\sqrt{112}}{4}$; la radice quadrata di 112, disprezzando il resto, è 10; dunque $\frac{10}{4}$ è la radice cercata che manca da $\sqrt{7}$ per meno di $\frac{1}{4}$, perocchè, essendo $\sqrt{112}$ compreso tra 10 e 11, $\frac{\sqrt{112}}{4}$ è compreso tra $\frac{10}{4}$ e $\frac{11}{4}$.

Sapendo estrarre coi decimali la radice quadrata per approssimazione da un numero intero, si saprà pure estrarre da una frazione, perchè, reso quadrato perfetto il denominatore, come si è ve-

duto nel n.° 212, si estrarrà la radice quadrata dal nuovo numeratore fino alla cifra decimale cercata, e si dividerà la frazione decimale trovata pel primo denominatore.

Potrebbesi anche operare nel modo indicato dalla regola seguente, che però è meno semplice. *Si trasformi la data frazione ordinaria in una frazione decimale che abbia tante coppie di cifre decimali, quante sono le cifre decimali che si vogliono nella radice. La radice quadrata di questa frazione decimale, sarà la radice richiesta.*

In ultimo se vogliasi la radice in una frazione ordinaria di dato denominatore, si ridurrà la frazione proposta ad avere per denominatore il quadrato del denominatore dato, colla regola del n.° 165, e si estrarrà la radice quadrata dal numeratore e dal denominatore di quest' ultima, disprezzando il resto al numeratore.

Così se vogliasi $\sqrt{\frac{3}{7}}$ per meno di $\frac{1}{15}$ si ridurrà $\frac{3}{7}$ a denominatore 225 ch' è il quadrato di 15, e si avrà $\frac{96}{225}$ la quale differisce da $\frac{3}{7}$ per meno di $\frac{1}{225}$. La radice di 96 cade tra 9 e 10, dunque $\frac{9}{15}$ è la radice quadrata di $\frac{3}{7}$ coll' approssimazione di meno di $\frac{1}{15}$.

216. Si noti che in tutti i casi l' estrazione di radice quadrata si è ridotta a quella di numeri interi.

I resti che si hanno successivamente dopo trovata ciascuna cifra della radice ponno essere bensì maggiore di tutta la radice trovata, ma però hanno un certo limite. A determinare il quale, si noti che conoscendo il quadrato di un numero intero, per esempio, di 7, per avere il quadrato del numero intero consecutivo, si dee fare $(7+1)^2=7^2+2\times7+1$; dunque il quadrato dell'intero consecutivo supera quello del numero proposto di due volte questo numero, più l' unità. Da ciò s' inferisce che ciascun resto dev' essere sempre minore del doppio della radice trovata, più l' unità, perchè altrimenti, aggiunto al quadrato di questa radice, darebbe il quadrato del numero consecutivo di essa radice, e pe-

rò non sarebbesi più preso, com' indica la regola, il massimo quadrato.

Estrazione di radici cubiche.

217. 1° Caso. Sempre che il numero proposto abbia una, due o tre cifre, la sua radice cubica ne ha una sola (133), e però in tal caso non ci è bisogno di operazione; così si saprà che $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{343}=7$.

Qualora il numero dato non sia cubo perfetto, la sua radice quadrata si estrarrà per approssimazione, e prendendo quella del massimo cubo che vi è contenuto, si errerà per meno di una unità: si farà per esempio $\sqrt[3]{129}=5$, $\sqrt[3]{40}=3$.

218. 2° Caso. Supponiamo in secondo luogo che la radice abbia due cifre. Distingueremo in un numero qualunque 27 le decine dalle unità e faremo $27^3=(20+7)^3=20^3+3\times20^2\times7+3\times20\times7^2+7^3$, pel teorema del n.° 139. Eseguiamo qui appresso le operazioni indicate.

$20^3= 8000$	19.683	27		
$3\times20^2\times7 = 8400$	8			
$3\times20\times7^2= 2940$	116.83	12	12	12
$7^3= 343$	116 83	54	48.	42
$27^3=19683$	0	81	64	49
		1821	1744	1669
		9	8	7
		16389	13952	11683

Il cubo delle decine non ha cifre significative di un ordine inferiore alle migliaia; noi separeremo perciò con un punto le tre prime cifre a destra del numero dato, ed estrarremo la radice cubica dal massimo cubo contenuto in 19: questo massimo cubo è 8, la cui radice cubica è 2, che sarà la cifra cercata; sottratto 8 da 19, si ha il resto 11 a destra del quale scriveremo le rimanen-

ti cifre del numero proposto; nel numero 11683 che ne risulterà sarà contenuto il triplo quadrato delle decine per la unità, più le due rimanenti parti del cubo. Ora osserveremo che il triplo quadrato delle decine per le unità non ha cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia; dunque nel numero 11683 separeremo con un punto le due prime cifre a destra e dividendo 116 pel triplo quadrato delle decine, cioè per 12 decine, si avrà la cifra delle unità: il quoziente di questa divisione è 9.

Bisogna ora vedere se 9 è veramente la cifra che si cerca. Per far ciò, aggiungeremo a 1200, cioè al triplo quadrato delle decine, il triplo delle decine per le unità ch'è 540, e il quadrato delle unità, cioè 81, indi moltiplicheremo per 9, cioè per le unità, la somma 1821; è facile di vedere che in questo modo si sono venute a formare le tre parti del cubo che costituiscono il numero 11683, e però, se 9 è la vera cifra delle unità, il prodotto dev'essere uguale a questo numero; ma questo prodotto è 16389 maggiore di 11683; dunque diminuiremo 9 di 1 e fatta la ripruova per 8, come prima, troveremo ancora 13952>11683; prenderemo dunque 7, e troveremo 11683=11683; onde 7 è la cifra delle unità.

Nelle tre prime somme di queste ripruove sonosi tralasciati di scrivere gli zeri a destra dei due primi numeri, perchè si vede che il primo ne ha sempre due, il secondo uno; onde basterà scrivere questi numeri l'uno sotto l'altro, retrocedendo convenientemente le prime cifre a sinistra dei due ultimi.

219. 3° Caso. Si ragionerà analogamente al n.° 211 pel caso in cui la radice abbia più di due cifre e sarà facilissimo di stabilire la regola seguente:

Per estrarre la radice cubica da un numero intero, si divida questo numero a cominciare dalla destra in classi di tre cifre, potendo anche l'ultima contenere una o due cifre. Si estragga la radice cubica dal massimo cubo contenuto in quest'ultima classe, e si avrà la prima cifra a sinistra della radice cercata. Sottratto dalla classe anzidetta il cubo della cifra trovata, si scriva a destra del residuo la classe seguente, e separate dal numero che ne risulta le due prime cifre a destra, si divida la prima parte pel triplo quadrato della cifra trovata, e si faccia la ripruova del quoziente (nel modo

indicato nel n.° precedente), *diminuendolo, se sia mestieri, successivamente di 1 finchè il prodotto sia uguale o minore di tutto il numero donde si è preso il dividendo. Sottraggasi da questo numero il prodotto, e scritta la classe seguente a destra del residuo, e separate dal numero che ne risulta le due prime cifre a destra, si divida la prima parte pel triplo quadrato della radice trovata, e così di seguito. Se una di queste divisioni non sia possibile, si ponga 0 alla radice per la cifra cercata ed abbassata la classe seguente, si continui come prima.*

Applichiamo questa regola al numero 12305472001. Ecco il quadro dell'operazione:

	12.305.472 001	2308	
	43 05	12	158700
	41 67	18	5520
	138 4.72	9	64
	138 4 720.01	1389	15925264
	127 4 021 12	3	8
Resto...	11 0 698 89	4167	127402112

220. Osservando che, per esempio, $(4+1)^3=4^3+3\times4^2+3\times4+1$, si conchiuderà analogamente al n.° 216 che ogni resto deve essere minore del triplo quadrato della radice trovata, più il triplo di questa radice, più l'unità.

L'estrazione di radice cubica è, come si vede, assai penosa, a cagione delle ripruove di ciascuna cifra della radice, ma questa operazione si ridurrà a molto maggiore semplicità per mezzo delle belle proprietà dei logaritmi, dei quali sarà parola nel capitolo IX.

221. Poichè il cubo di una frazione si ottiene elevandone a cubo il numeratore ed il denominatore, viceversa, *la radice cubica di una frazione si ha con estrarre la stessa radice dal numeratore e dal denominatore;* così $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}, \sqrt[3]{\frac{125}{343}}=\frac{5}{7}$.

Quando i termini della frazione non siano entrambi cubi perfetti, la radice cubica di questa frazione, essendo incommensu-

rabile (209), non si può esprimere in numeri se non per approssimazione, e si opera come per la radice quadrata, cioè si rende il denominatore un cubo perfetto, indi estratta dal numeratore la radice cubica fino ad una data cifra decimale, nel modo che si vedrà in appresso, si dividerà questa pel denominatore della frazione primitiva. Così per $\frac{2}{3}$, si moltiplicheranno ambi i termini per 9, cioè pel quadrato del denominatore e si avrà $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$. Alcune volte si può rendere cubo perfetto il denominatore moltiplicandolo per un numero minore del suo quadrato; a cagion d'esempio, $\frac{3}{8}$ si ridurrà a $\frac{3}{64}$, moltiplicando il denominatore per 8 e non per 8^2; così l'operazione è più semplice.

222. Osservando che l'unità seguita da un numero di zeri che sia multiplo di 3, come 1000, 1000000, ec., rappresenta sempre un cubo perfetto, si conchiuderà analogamente al n.° 213 che *per estrarre la radice cubica da una frazione decimale, bisogna rendere il numero delle cifre decimali multiplo di 3, se già non sia tale, scrivendovi a destra gli zeri sufficienti, poscia estrarre la radice cubica dal numero intero rappresentato da tutte le cifre significative, e separare a destra di questa radice la terza parte del numero delle cifre decimali che sonosi prese nella frazione proposta. Qualora questa radice cubica non possa estrarsi esattamente, disprezzando il resto, si errerà per meno di una unità dell'ultima sua cifra decimale, e se vogliasi spingere più oltre l'approssimazione, bisognerà prendere nella frazione data un numero triplo di cifre di quelle che si cercano nella radice cubica e poi operare come prima.*

Per 0,000125, essendo sei le cifre decimali, si estrarrà la radice cubica da 125 ch'è 5, e dovendo separare due cifre decimali, si avrà $\sqrt[3]{0,000125}=0,05$. Per avere $\sqrt[3]{0,3}$ a meno di 0,01 si farà $\sqrt[3]{0,3}=\sqrt[3]{0,300000}$, si prenderà la radice cubica di 300000,

disprezzando il resto, e separate due cifre decimali, sarà $\sqrt[3]{0,3} = 0,67$.

Quando le cifre decimali date siano più del triplo di quelle che si vogliono nella radice, si sopprimeranno le superflue; così $\sqrt[3]{3,2178}$ a meno di 0, 1 si ottiene prendendo $\sqrt[3]{3217} = 15$, e separata una cifra decimale, $\sqrt[3]{3,2178} = 1,5$.

223. Di qui si deduce *che per estrarre mediante i decimali la radice cubica per approssimazione da un numero intero che non sia cubo perfetto, bisognerà scrivere a destra di questo numero un numero di zeri triplo di quello delle cifre decimali che si domandano nella radice cubica estrarre la radice cubica, disprezzando il resto, dal numero che ne risulta, e separare in questa il numero di cifre decimali cercato.*

Per $\sqrt[3]{57}$ fino al millesimo, si farà $\sqrt[3]{57000000000} = 3848$, e quindi $\sqrt[3]{57} = 3,848$.

224. Se si voglia $\sqrt[3]{7}$ per meno di $\frac{1}{4}$ si moltiplicherà e dividerà 7 per 64, cioè per 4^3, e si avrà $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{448}{64}} = \sqrt[3]{\frac{448}{4}}$; estraendo la radice cubica dal numeratore e disprezzando il resto, si otterrà $\frac{7}{4}$ per la radice cercata.

Volendo $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ per meno di $\frac{1}{3}$ si ridurrà $\frac{3}{4}$ a denominatore 27, cioè 3^3, e si avrà (165) ad estrarre $\sqrt[3]{\frac{7}{27}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{3}$; disprezzando il resto al numeratore, la radice cercata sarà $\frac{1}{3}$.

225. La ripruova dell'estrazione di radice quadrata o cubica si opera elevando a quadrato o a cubo la radice trovata, ed aggiungendovi il resto, se ce n'abbia.

Si è indicata nel n.º 139 la ragione per la quale nell'aritmetica si tratta solamente dell'estrazione della radice quadrata e della radice cubica; sicchè noi non faremo qui parola di procedimenti per estrarre la radice 4ª, 5ª, 6ª..., i quali, come si vedrà nell'algebra, sono analoghi ai due veduti ora. Non tralasceremo però di far notare che dopo questi due procedimenti si potranno estrarre tutte quelle radici, gl'indici delle quali si scompongano nei fattori 2 e 3. Si è veduto nel n.º 208 che per elevare un numero ad una potenza il cui esponente si scomponga nei fattori 2 e 3, si eleverà successivamente questo numero a quadrato o a cubo; dunque, viceversa, quando l'indice della radice si scomponga nei fattori 2 e 3, si estrarrà la radice cercata dal numero proposto con reiterate estrazioni di radici quadrate o cubiche. Così, per

$\sqrt[12]{24410625}$, essendo $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, si farà successivamente

$$\sqrt[3]{24410625} = 625, \ \sqrt{625} = 25, \ \sqrt{25} = 5; \text{ onde } \sqrt[12]{24410625} = 5.$$

Osservazione sul calcolo delle quantità incommensurabili.

226. Nelle quantità incommensurabili (o come sogliono anche dirsi *irrazionali*, dacchè non può esprimersi esattamente il loro rapporto coll'unità) provenienti dall'estrazioni delle radici quadrate e cubiche, si è avuto l'esempio del modo onde queste quantità possono esprimersi in frazioni decimali od ordinarie, spingendo l'approssimazione tanto oltre quanto si voglia.

Anche potrebbonsi le quantità irrazionali rappresentare con frazioni continue, quando siansi già espresse in decimali; è da notare però che il valore in decimali è sempre approssimativo, ed aumentando di 1 l'ultima cifra decimale, si hanno due limiti tra i quali è compreso il vero valore della quantità proposta (194); onde, per non uscire da questi limiti, bisognerà fare il medesimo calcolo sulle due frazioni, e non prendere nella frazione continua altri quozienti se non quelli che si hanno insieme dalle due operazioni.

Per dissipare ogni dubbio, porteremo l'esempio di ridurre in frazione continua il rapporto della circonferenza al diametro, che sono due linee incommensurabili.[1] Arrestandoci alla quinta cifra decimale, questo rapporto è 3, 14159; aumentando di 1 l'ultima cifra decimale, si avrà 3, 14160 ch'è il limite in più di questo rapporto; onde si avranno a ridurre in frazioni continue le due frazioni $\frac{314159}{100000}$ e $\frac{314160}{100000}$.

Operando come nel n.° 185, per la prima frazione i quozienti saranno 3, 7, 15, 1, e per la seconda 3, 7, 16, ec.; donde si vede che il terzo quoziente rimane incerto. Se dunque vogliansi più di tre termini nella frazione continua, bisognerà prendere più di cinque cifre decimali nel valore della circonferenza. Assumendo quello dato da Ludolfo in trentacinque cifre, ch'è 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288, aumentando di 1 l'ultima cifra decimale 8, ed operando come prima sulle due frazioni decimali, si otterrà la seguente serie di quozienti: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; onde si avrà

$$\frac{\text{circonf.}}{\text{diam.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{ec.}}}}}}}$$

Adunque, lasciando i numeri interi i quali dànno l'approssimazione per meno di una unità e però troppo lieve, le quantità incommensurabili si potranno esprimere in frazioni ordinarie, decimali o continue; ma le decimali sono le più comode, e però usate ordinariamente a preferenza; e siccome nulla impedisce di avere quante cifre decimali si vogliano, così benchè intrinseca-

[1] Vedi Legendre *Géométrie* lib. IV prop. XIV, come pure la nota IV ove si dimostra l'incommensurabilità tra queste due linee.

mente questi valori sian sempre approssimativi, essendo gli errori, per grande che possa essere l'unità, disprezzabilissimi, si possono le quantità irrazionali considerar quasi come espresse in numeri, per mezzo di quei valori, e così vedesi com'elle si sottomettono al calcolo al pari delle quantità razionali. La facilità dei metodi di approssimazione che ora si posseggono procede unicamente dall' acconcia ed elegante numerazione scritta dei moderni, la quale facilita immensamente i calcoli, in ispezialtà colle frazioni decimali, e gli antichi non aveano neppure idea delle nostre approssimazioni. Archimede non senza grande fatica trovò che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso tra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$, i quali valori sono equivalenti a 3, 1428 e 3, 1408, laddove ora si ha questo valore sino alla centocinquantaquattresima cifra decimale. [1].

---

[1] Archimede trovò i limiti detti di sopra per mezzo dei poligoni regolari iscritti e circoscritti di 96 lati ciascuno. Ludolfo Van Ceulen continuò con una fatica spaventevole i calcoli di Archimede col medesimo metodo e trovò, come si è veduto di sopra, 34 cifre decimali esatte. Il valore con 154 cifre decimali citato innanzi trovasi in un manoscritto nella biblioteca di Ratclif a Oxford. La scienza possiede ora metodi più spediti, e i più illustri geometri vi ci sono occupati, come il Leibnizio, il Bernoulli, l' Eulero e il Wronski.

CAPITOLO VII.

NUMERI CONCRETI E COMPLESSI.

Passaggio dai numeri astratti ai numeri concreti.

227. Nei capitoli precedenti si è avuto per obbietto il calcolo dei numeri interi e frazionari considerati come astratti, e le regole quivi stabilite convengono particolarmente a ciascun numero concreto, perocchè qualunque sia la natura speciale di ciascuna unità, le leggi della formazione dei numeri interi e fratti risultanti dal paragonare a quella unità le altre grandezze dello stesso genere, sono le stesse, e però anche le stesse sono le proprietà che si sono studiate nel calcolo di questi numeri, proprietà che si sono fatte unicamente discendere dall'idea avuta a principio della formazione dei numeri.

Intanto, se le operazioni sui numeri astratti intrinsecamente non ponno essere che le medesime di quelle che si eseguono sui numeri concreti, in questi ultimi sono tuttavia da fare alcune avvertenze particolari per una nuova maniera ond'ei soglionsi rappresentare.

Quando si stabilisce una unità, volendo esprimere in numeri per mezzo di essa tutte le altre quantità dello stesso genere, il che si farà esattamente per le commensurabili, e con un'approssimazione quanto si voglia grande per le incommensurabili, due specie di numeri si possono avere, o interi o fratti. Se dunque pei numeri concreti si stabilisse una sola unità, come si è supposto pei numeri astratti, riferendo ad essa le quantità che occorrono numerare, si avrebbero numeri interi e fratti da trattarsi

colle medesime regole dei numeri astratti, e non sarebbe mestieri di niuna particolare avvertenza. Ma non è stata questa la più comoda maniera nella pratica, perocchè da una parte le quantità molto grandi rispetto all'unità sarebbero state espresse da numeri interi o fratti troppo alti, e le piccole da frazioni imbarazzanti, oltre che alla moltitudine non sarebbe stata facile l'intelligenza di frazioni alquanto complicate. Si è stati perciò condotti ad esprimere tutto in numeri interi o naturali che sono intelligibili ad ognuno, e stabilita una unità, si è stabilita per una seconda unità una certa sua parte aliquota, dandole un nome differente, perchè così una quantità che contenesse questa parte aliquota più volte, poteva essere espressa da un numero intero, e la differenza dei nomi delle unità bastava a far vedere che parte ella era dell'unità principale. Per esempio, la nostra unità di lunghezza è la *canna*; alla sua ottava parte si è dato il nome di *palmo*, e si è stabilito questo palmo per una seconda unità; onde la quantità 3 palmi corrisponde a $\frac{3}{8}$ di canna: la parola palmo ricorda che ciascuna unità è l'ottava parte del palmo. La ragione per la quale si è scelta per seconda unità una parte aliquota della prima si è quella di esprimere in numeri più semplici una stessa quantità; così 18 palmi è lo stesso che 2 canne e 2 palmi, perchè 18 palmi contiene 8 palmi, cioè una canna, due volte; il che non sarebbe avvenuto se la seconda unità non fosse stata una parte aliquota della prima. Quello che si è fatto della seconda unità rispetto alla prima si è fatto di una terza rispetto alla seconda, di una quarta rispetto alla terza, ec.; così il palmo si è diviso in 12 *once*, l'*oncia* in 5 *minuti*. Ecco come si scrive un numero *complesso*: 3 can. 6 pal. 10 onc. 2 min.

Le cose che occorrono ordinariamente a misurare sono le *lunghezze*, le *superficie*, le *capacità*, le *monete*, i *pesi* e il *tempo*. [1]

[1] Occorrono anche, ma meno ordinariamente, a misurare gli *angoli*, le *forze* e le *densità* dei corpi. Gli angoli si misurano dagli archi di cerchio descritti collo stesso raggio dai loro vertici e compresi fra i loro lati; l'unità principale è la quarta parte della circonferenza, o il *quadrante*. Le forze si misurano dai loro

Condizioni che si richieggono in un sistema metrico — Sistema metrico francese.

228. Perchè un *sistema metrico* o di misure abbia la sua maggiore perfezione, fa duopo che adempia alle condizioni seguenti: 1° che sia scelta una unità principale la quale possa verificarsi in ogni tempo e in ogni luogo; 2° che tutte le altre misure dipendano da questa unità principale; 3° che le suddivisioni di ciascuna specie di unità concrete, abbiano la massima conformità col nostro sistema di numerazione e conducano ai calcoli più semplici; 4° che la nomenclatura sia formata del minor numero di voci possibile; 5° che i nomi delle varie unità della stessa specie esprimano il rapporto di ciascuna di esse all' unità principale; 6° che si evitino quanto più sia possibile le frazioni, suddividendo ciascuna specie di unità concreta nel modo più convenevole agli usi suoi.

Il sistema metrico in uso oggidì in Francia, stabilito con grandi fatiche dai più illustri geometri del secolo passato, è il solo che soddisfaccia a tutte queste condizioni insieme, e però merita di essere esposto in primo luogo.

1.° L'unità principale dalla quale dipendono quelle delle altre specie è il *metro* che misura le lunghezze, il quale è la diecimilionesima parte dell'arco del meridiano di Parigi che si estende dal polo all'equatore.

2.° L' *ara* è l'unità di superficie; essa è un quadrato il cui lato è di dieci metri.

3.° L'unità di volume è il *litro*, cioè un cubo che ha per lato la decima parte del metro. Si fa pure uso del metro cubo, o *stero* per misurare le legna da ardere.

4.° Il peso di un cubo di acqua pura che ha per lato la centesima parte del metro è l' unità di peso, e si chiama *grammo*.

5.° L'unità di moneta è il *franco*, pezzo d'argento del peso di 5 grammi, colla lega di 0, 1 di rame.

effetti, cioè dalle velocità che imprimono ai corpi, le quali velocità si valutano dagli spazi percorsi in tempi uguali. Le densità dei corpi si misurano dalle masse comprese in volumi uguali.

Di ciascuna di queste unità si prendono dei multipli di dieci in dieci maggiori e delle suddivisioni di dieci in dieci minori. I nomi delle novelle unità che così nascono si formano col porre innanzi a quelli delle rispettive unità principali le voci

miria, chilo, ecto, deca, deci, centi, mille.

che significano rispettivamente

diecimila, mille, cento, dieci, decimi, centesimi, millesimi.

In questo modo, non solamente i nomi differenti saranno solo quelli delle unità principali di ciascuna specie, ma ciascun nome delle unità secondarie esprimerà il rapporto che ha ciascuna di queste con la principale rispettiva.

Così per le lunghezze si avrà la serie delle misure seguenti: *miriametro, chilometro, ettometro, decametro*, METRO, *decimetro, centimetro, millimetro*.

Due soli multipli dell' ara ci hanno che sembrano avere qualche utilità, ciò sono l' *ecatara*, cioè cento are, e la *miriara*, o centomila are.

Per le capacità ci hanno l' *ecatolitro*, il *decalitro*, il *litro*, il *decilitro*, il *centilitro*, e il *millilitro*.

Pei pesi vi è il *miriagrammo*, il *chilogrammo*, l' *ecatogrammo*, ec.

Per le monete ci ha il *franco*, il *decimo*, il *centesimo*, i cui valori relativi sono ugualmente di dieci in dieci volte minori.

229. L'esposizione di qualche altro sistema metrico renderà vie più chiari i vantaggi del sistema decimale francese. Dell'antico sistema metrico francese esporremo quello in uso a Parigi, perocchè esso cangiava per le varie province ed anche per le varie città.

L'unità lineare chiamavasi *tesa*, e non era punto presa in natura, ma fissata arbitrariamente. L'unità di peso era la *libbra*; per pesare i diamanti ci era il *carato*. Il giorno, come è pur ora colle medesime suddivisioni, era l'unità di tempo. Le stoffe misuravansi coll' *auna*; le capacità avevano il *moggio*, e la *pinta*. Le

suddivisioni di ciascuna di queste misure sono manifeste dal quadro seguente:

Tesa.	Piedi.	Pollici.	Linee.
1 =	6 =	72 =	864
	1 =	12 =	144
		1 =	12

Giorno.	Ore.	Minuti.	Secondi.
1 =	24 =	1440 =	86400
	1 =	60 =	3600
		1 =	60

Libbra.	Marchi.	Once.	Grossi.	Scrupoli.	Grani.
1 =	2 =	16 =	128 =	384 =	9216
	1 =	8 =	64 =	192 =	4608
		1 =	8 =	24 =	576
			1 =	3 =	72
				1 =	24

Moggio.	Sestieri.	Boisseaux.	Litrons.
1 =	12 =	144 =	2304
	1 =	12 =	192
		1 =	16

Lira.	Soldi.	Denari.
1 =	20 =	140
	1 =	12

Il carato pesa 3,876 grani di marco, e si divide in quattro *grani*.

L'auna è di circa 44 pollici.

Il boisseau è una capacità di 655,78 pollici cubi; la pinta 46,95.

In quanto al rapporto delle nuove misure francesi colle antiche, veggasi alla fine dell'aritmetica.

Sistema metrico napoletano nuovo e antico, e sistema metrico di Sicilia.

230. 1.° La base del nuovo sistema metrico napoletano è il *palmo*, che si divide in parti decimali, e dieci palmi formano una *canna*.

Il palmo è la settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero la settemillesima parte del miglio geografico d'Italia, o miglio nautico di sessanta a grado.

2.° La canna lineare, la canna quadrata, la canna cuba sono le unità di misura di lunghezza, di superficie e di solidità per

tutti gli usi. La prima è uguale a 10 palmi lineari, la seconda a 100 palmi quadrati, la terza a 1000 palmi cubi.

3.° L'unità superficiale delle misure agrarie è il *moggio* di 10000 palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia per lato 100 palmi, o canne 10. Esso si divide in parti decimali.

4.° Il *tomolo* è l'unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso equivale a 3 palmi cubi, e si divide in due *mezzette*, o in 4 *quarte*, o pure in 24 *misure* ciascuna delle quali eguaglia il cubo del mezzo palmo. La misura degli aridi si pratica a *raso* e non a *colmo*.

5.° Il *barile* è l'unità di misura di capacità per alcuni liquidi, come il vino, l'aceto, l'acqua, ec., e si divide in 60 *caraffe*. Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza.

6.° L'olio si misura a peso, cioè a cantaia, a rotola ed a frazioni decimali di rotolo. Pel commercio a minuto si può misurare a capacità, ma le misure debbono essere di figura cilindrica e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20 gradi del termometro centigrado.

7.° Il *rotolo* è l'unità di misura dei pesi, e si divide in parti decimali: la sua millesima parte è il *trappeso*. Il *cantaro* si compone di 100 rotola.

Per alcuni generi si usa la *libbra* colle sue suddivisioni, come nell'antico sistema.

Il quale antico sistema essendo ancora comunemente in uso, vuole essere qui esposto, e trovasi riepilogato nel quadro che segue.

LUNGHEZZE.

Canna.		Palmi.		Once.		Minuti.
1	=	8	=	96	=	480
		1	=	12	=	60
				1	=	5

MISURE AGRARIE.

Moggio.		Quarte.		None.		Quinte.
1	=	10	=	90	=	490
		1	=	9	=	45
				1	=	5

PESI.

Libbra.	Once.	Dramme.	Trappesi.	Grani.
1	= 12	= 120	= 360	= 7200
	1	= 10	= 30	= 600
		1	= 3	= 60
			1	= 20

CAPACITA' PER GLI ARIDI.

Tomolo.	Misure.	Quartarole.
1	= 24	= 92
	1	= 4

PER L' OLIO.

Staio.	Quarti.	Misurelli.
1	= 16	= 96
	1	= 6

PEL VINO.

Carro.	Botti.	Barili.	Caraffe.
1	= 2	= 24	= 1440
	1	= 12	= 360
		1	= 60

MISURE ITINERARIE.

Miglio.	Passi.	Palmi.
1	= 1000	= 7000
	1	= 7

Indicherò i rapporti che queste misure hanno col palmo.

Il tomolo eguaglia palmi cubi 3, 017807; onde un palmo cubo è tomola 0,3313651.

Un barile uguaglia tomola 1,266655, e palmi cubi 2, 38250; quindi un palmo cubo è uguale a 0, 4197246 barili, e un tomolo è uguale a 0, 7894807 barili. Una caraffa da botte è palmi cubi 0, 039708; e una caraffa a minuto è palmi cubi 0, 036098; onde un palmo cubo è uguale a 25, 18358 caraffe di botte, e a 27, 70194 caraffe a minuto. La caraffa a minuto è $\frac{1}{66}$ del barile.

Un palmo cubo d' acqua distillata pesa libbre 57, 14830, o rotola 20, 573388; onde una caraffa da botte di acqua distillata peserà libbre 2, 26926, e una caraffa a minuto peserà libbre 2,06296; una libbra sarà il peso di palmi cubi 0, 017498 d' acqua distillata, e conterrà caraffe da botte 0, 44067 e caraffe a minuto 0,48474 di acqua distillata.

Il palmo è metri 0, 26367.

231. Il sistema metrico di Sicilia stabilito con real decreto del 31 dicembre 1809 ha per base il *palmo*, ch'è l'unità lineare, ed è uguale a metri 0, 2581882, e a palmi napoletani 0, 9792095. Il *tomolo* ch' è l' unità di misura di capacità per gli aridi eguaglia un palmo cubo; il *quartaro* ch'è l' unità di misura di capacità

pei liquidi è pure un palmo cubo. Il *rotolo* ch' è l' unità di peso è il peso della ventesima parte di un palmo cubo di olio di uliva puro.

Il *miglio*, misura itineraria, è di palmi 5760. La *salma*, ch'è l'unità di misura agraria è un quadrato che ha per lato 64 canne.

Queste unità si suddividono nel modo seguente:

Canna.	Palmi.	Once.	Linee.	Punti.
1 =	8 =	96 =	1152 =	13824
	1 =	12 =	144 =	1628
		1 =	12 =	144
			1 =	12

Miglio	Corde.	Catene.	Canne.
1 =	45 =	180 =	720
	1 =	4 =	16
		1 =	4

Salma.	Bisacce.	Tomoli.	Mondelli.	Carozzi.	Quarti.
1 =	4 =	16 =	64 =	256 =	1024
	1 =	4 =	16 =	64 =	256
		1 =	4 =	16 =	64
			1 =	4 =	16
				1 =	4

Botte.	Barili.	Quartari.	Quartucci.	Caraffe.	Bicchieri.
1 =	32 =	64 =	1280 =	2560 =	5120
	1 =	2 =	40 =	80 =	160
		1 =	20 =	40 =	80
			1 =	2 =	4
				1 =	2

Rotolo.	Once.	Dramme.	Danari.	Grani.	Ottavi.
1 =	30 =	240 =	720 =	14400 =	115200
	1 =	8 =	24 =	480 =	384
		1 =	3 =	60 =	480
			1 =	20 =	160
				1 =	8

Il *tomolo* per gli aridi si divide in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, il carozzo in 4 *quarti*, e il quarto in 4 *quartigli*; 16 tomoli formano una *salma*.

Riduzione di un numero complesso a numero incomplesso, e viceversa.

232. In due modi si può ridurre un numero complesso in numero incomplesso: o esprimendo tutto in unità dell'ultima specie, o in unità della prima specie; nel primo caso si avrà un numero intero, nel secondo una frazione.

Abbiasi a ridurre 3 can. 5 pal. 7 onc. 2 min. in numero incomplesso, prendendo per unità il minuto. Poichè 1 can. uguaglia 8 pal., 3 can. uguaglieranno pal. 24; a questi aggiunti gli altri 5 pal. del numero proposto, si avranno 29 pal. Ora, essendo 1 pal. uguale a 12 on., 29 pal. saranno uguali ad onc. $29\times12=384$; ed aggiunte le altre 7 once, la somma è di once 355. Finalmente, siccome 1 onc. si divide in 5 min., 355 onc. formeranno min. $355\times5=1775$, a cui aggiunti i 2 min. del numero proposto, ri avranno minuti 1777 il cui valore è equivalente e quello del dato numero complesso. Nello stesso modo opererebbesi per qualunque altro esempio simile, cioè generalmente *si moltiplicherebbe ciascun risultamento pel numero ch'esprime la suddivisione della sua unità ed aggiungerebbonsi al prodotto le unità date della specie seguente.*

233. Vogliasi ora trasformare lo stesso numero complesso 3 can. 5 pal. 7 onc. 2 min. in numero incomplesso, prendendo per unità la canna. Poichè 1 min. è la quinta parte di 1 onc., 2 min. saranno $\frac{2}{5}$ di 1 onc.; aggiunte le 7 onc. date, si avranno onc. $7\frac{2}{5}=\frac{37}{5}$. Parimente queste once si ridurranno a pal. dividendole per 12, cioè moltiplicando per 12 il denominatore, il chè dà pal. $\frac{37}{60}$; si aggiungeranno a questi i 5 pal. dati, e si avrà $5\frac{37}{60}=\frac{337}{60}$. Moltiplicando il denaminatore per 8, si ridurranno questi pal. a can., e risulteranno can. $\frac{337}{480}$; in ultimo, aggiunte le 3 can. date il numero proposto sarà uguale a can. $3\frac{337}{480}=\frac{1777}{480}$. Adunque le operazioni sono le inverse del n.º precedente, e generalmente *procedendo da destra a sinistra, ciascun risultamento si dividerà pel numero ch'esprime quante volte la sua unità è contenuta in quella della specie immediatamente superiore, e al risultamento si aggiungeranno le unità di questa specie superiore.*

Potevasi anche operare, riducendo il numero dato a minuti, e si trovavano come nel n.º precedente minuti 1777; ma 1 minuto è $\frac{1}{480}$ di canna, dunque il numero dato è uguale a $\frac{1777}{480}$ di canna.

Ma la prima maniera è da preferire, perchè in certi casi si perverrebbe ad una espressione più semplice, ove si presentassero alcune semplicizzazioni nei successivi risultamenti.

234. Se in cambio di una frazione ordinaria si volesse una frazione decimale, si troverebbe prima l'ordinaria nel modo indicato, e poi la si svolgerebbe in decimali o esattamente se sia possibile, o con quella approssimazione che si voglia. Ma sarà più semplice di convertire in decimali la prima frazione: così, nel nostro esempio convertiremo in decimali $\frac{2}{5}$ ed avremo 0, 4; divideremo per 5, ed avremo onc. 0, 08, o aggiunte le altre onc., 7, 08; divideremo questa per 12, ed otterremo pal. 0, 59, e aggiunti gli altri pal., 5, 59; dividendo per 8 ed aggiungendo le 3 canne date, risulteranno can. 5, 61875.

235. Viceversa, sia dato il numero incomplesso dell'ultima specie 1777, e si voglia questo ridurre in numero complesso; non si avranno che a fare le operazioni inverse nel n.° 232. Per vedere quante once contengono 1777 min., siccome 5 min. formano 1 onc., bisogna vedere quante volte 5 è contenuto in 1777, il che si fa dividendo 1777 per 5: questa divisione dà 355 col resto 2; dunque 1777 min. = 355 onc. 2min. Parimente, siccome 12 once formano 1 palmo, per vedere quanti palmi sono contenuti in 355onc., si dividerà 355 per 12, il che dà 29 col resto 7; dunque 1777min.= 29pal. 7onc. 2min. In ultimo, dividendo 29 per 8, si ha 3 col resto 5; dunque 1777min. = 3can. 5pal. 7onc. 2min. Le operazioni indicate si dispongono come qui appresso.

```
1777  |5
2min. |355   |12
      |111   |29    |8
      |7onc. |5pal. |3can.
```

236. Se il numero incomplesso sia della prima specie, le operazioni saranno inverse di quelle del n.° 233.

Abbiansi a ridurre canne $\frac{1777}{480}$ a numero complesso. Essendosi per ultima operazione del n.° 233 ridotto intero e fratto a un sol fratto, qui per contrario si estrarranno gl'interi dalla frazione

data, e si avranno canne $3\frac{337}{480}$; la frazione $\frac{537}{480}$ nel n.° citato si è ottenuta dividendo per 8 la frazione di palmi; al contrario dunque, per ridurre can. $\frac{337}{480}$ a palmi, si moltiplicherà questa frazione per 8, moltiplicando il numeratore per 8, e si avrà $\frac{2696}{480} =$ $5\frac{296}{480}$ pal. Parimente si vede che bisogna moltiplicare $\frac{296}{480}$ per 12, il che dà $\frac{3552}{480} = 7\frac{192}{480}$ onç. Finalmente moltiplicando $\frac{192}{480}$ per 5, si ha $\frac{960}{480} = 2$. Adunque il numero proposto $\frac{1777}{480}$ can. $=$ 3can. 5.pal. 7onc. 2min.

Ecco come si dispongono le operazioni:

	1777	480
	337	3can.
	8	
prod. del resto per 8...	2696	480
	296	5pal.
	12	
	592	
	296	
prod. del resto per 12...	3552	480
	192	7onc.
	5	
prod. del resto per 5.....	960	480
	000	2min.

Se la frazione data fosse decimale, se ne troverebbe prima la generatrice ordinaria, ed indi oprerebbesi nel modo indicato.

Operazioni sui numeri complessi.

237. I numeri complessi del nuovo sistema metrico francese si scrivono in frazioni decimali, e però il loro calcolo riducesi a quello di queste frazioni e non abbisogna di nuove regole. Il numero

complesso 5 decametri 4 metri 7 decimetri 9 millimetri si rappresenta colla frazione decimale di metri 35, 709, perocchè ciascuna unità è decupla di quella della specie immediatamente inferiore.

Esporremo dunque le regole per il calcolo dei numeri complessi appartenenti a sistemi metrici non decimali.

238. Addizione. *Si dispongano i numeri complessi da sommarsi gli uni sotto degli altri, allogando le unità della stessa specie in una colonna medesima; si sommino i numeri di ciascuna colonna, incominciando da destra e se la somma contenga alcune unità della specie superiore, si ritengano queste unità per aggiungerle alla somma della colonna seguente, e si scriva a piè della colonna che ha data quella somma, il solo resto, che potrebbe anche essere zero.*

Vagliano gli esempi infrascritti.

Tese.	Piedi.	Pollici.	Linee.
2	5	10	$8\frac{1}{2}$
1	5	9	$7\frac{2}{3}$
	2	8	6
		5	$11\frac{3}{4}$
5	0	10	$9\frac{11}{12}$

Canne.	Palmi.	Once.	Minuti.
3	6	9	3
5	7	3	2
1	5	0	4
		10	1
11	4	0	0

Nell'esempio a sinistra la somma delle frazioni è $1\frac{11}{12}$; scritta dunque la frazione, si ritiene l'unità, la somma della colonna delle linee più qnesta unità è 33, in cui 12 è contenuto 2 volte col resto 9; posto dunque 9 a piè della colonna, si riterranno i 2 pollici, che aggiunti alla somma della colonna dei pollici, dànno pollici 34, che contengono 2 volte 12 col resto 10; si scriveranno dunque questi 10 pollici a piè della colonna e si riterranno i 2 piedi. La somma della colonna dei piedi, più 2, è 12 piedi che formano esattamente 2 tese; dunque si porrà 0 nella colonna dei piedi, e si riterranno le 2 tese che aggiunte alla somma della colonna seguento, dànno tese 5.

In egual modo si è operato nell'altro esempio.

239. Sottrazione. *Si scriva il sottrattore sotto del sottraendo, ponendo le unità della stessa specie nella colonna medesima; indi si*

eseguano partitamente le sottrazioni in ciascuna colonna, incominciando da destra, e se una sottrazione non si possa eseguire, si aggiunga al sottraendo una unità della specie superiore, e poi si consideri diminuito di 1 il sottraendo nella colonna seguente.

Applichiamo questa regola ai due esempi seguenti.

Botti.	Barili.	Caraffe.	Tomoli.	Misure.	Quartarole.	Lire.	Soldi.	Danari.
2	1	9	3	2	1	8	3	2
1	9	11	1	15	3	5	11	9
	3	22	1	10	2	2	11	5

Nel primo a sinistra, non potendosi nella colonna delle caraffe eseguire la sottrazione 9 — 11, si aggiungerà a 9 un barile che vale 24 caraffe e si avrà 33—11=22. Nella colonna seguente, essendosi preso innanzi un barile, si ha 0 per sottraendo; si prenderà dunque una botte che vale 12 barili, e si avrà 12—9=3. Finalmente nell'ultima colonna, essendosi presa innanzi una botte, si ha 1—1=0.

240. Moltiplicazione. Faremo innanzi tratto osservare che per la definizione stessa della moltiplicazione, il moltiplicatore è sempre un numero astratto. Infatti che significato avrebbe l'espressione: 5 palmi moltiplicati per 7 lire? Bisogna dire 5 palmi moltiplicati per 7, ovvero presi 7 volte. Spesso però, essendo entrambi i fattori due numeri complessi, il moltiplicatore non si può nominare astrattamente, e si usa la prima espressione; ma questo non sarà sempre che un modo di esprimersi, e vedremo che in sostanza il moltiplicatore è sempre un numero astratto.

Di più la natura del prodotto è determinato dalla quistione stessa che ha condotto alla moltiplicazione. Così nell'esempio portato or ora di 5 palmi moltiplicati per 7 lire, il prodotto di 5 per 7 è 35, e si tratta di determinare se 35 esprima palmi o lire. Ora questa moltiplicazione non ha potuto nascere che dalla quistione seguente: 1 palmo costa 7 lire, e si vuol conoscere quante lire costeranno 5 palmi; il prodotto è 35 lire.

Due casi sono da considerare nella moltiplicazione dei numeri

complessi: quando il moltiplicatore sia imcomplesso, e quando sia complesso.

1° Caso. *Quando il moltiplicatore sia incomplesso, si moltiplichi per esso ciascuna parte del moltiplicando, incominciando da sinistra. e ottenuto il prodotto della prima parte si dividerà successivamente ciascuna delle altre in parti aliquote di una unità della specie che la precede, e così ognuno dei rimanenti prodotti parziali si otterrà col prendere una certa parte del precedente.*

Un esempio renderà facile l'applicazione di questa regola. Si domanda il costo di 15 can. di una stoffa, essendo 3 lir. 12 sold. 5 dan. quello di 1 can.; è chiaro che bisogna moltiplicare per 15 il costo di 1 can. L'operazione si dispone così:

	Lire.	Soldi.	Danari.	
	3	12	5	
	15			
per 3 lir....	45			
per 10 sold....	7	10		
per 2 sold....	1	10		
per 1 sold....................				15 sold.
per 4 dan....... ..		5		
per 1 dan.....		1	3	
	54	6	3	

Si moltiplicheranno prima 3 lir. per 15 e si avranno 45 lir. Si divideranno poi i 12 sold. in parti aliquote di lira, cioè in 10+2 sold.; indi si dirà: se 1 lir. moltiplicata per 15 dà 15 lir., 10 soldi che sono la metà di 1 lir. daranno la metà di 15 lir.; per ottener la quale si dirà: la metà di 15 lir. è 7 lir., che si scriverà nella colonna delle lire, col resto 1 lir. che equivale a 20 sold. la cui metà è 10 sold. che si pone nella colonna dei soldi. Il prodotto per gli altri 2 sold. si otterrà similmente prendendo la quinta parte del prodotto trovato, e si avrà 1 lir. 10 sold. Ora, siccome i danari si debbono dividere in parti aliquote di 1 sold., e quindi si debbono prendere alcune parti del prodotto per 1 sold., noi, per più semplicità, troveremo questo prodotto per 1 sold., prendendo

la metà di quello per 2 sold. trovato ora, ed avremo 15 sold. che scriveremo fuori di tutte le colonne per non comprenderlo nella somma. I 5 dan. si divideranno in 4+1 dan.; il prodotto per 4 dan. si avrà prendendo la terza parte del prodotto per 1 sold., il che dà 5 sold.; e la quarta parte di quest' ultimo, cioè 1 sold. 5 dan. sarà il prodotto per 1 dan. Sommando tutti questi prodotti parziali, come si è stabilito nel n.° 238, si avrà per prodotto totale 54 lir. 6 sold. 3 dan.

Quando il moltiplicatore abbia una sola cifra, sarà più semplice d'incominciare le moltiplicazioni parziali da destra, ed operare come per l'addizione. Nell'esempio precedente in luogo di 16 si prenda 7 per moltiplicatore.

Lire.	Soldi.	Danari.
3	12	5
		7
25	6	11

Si moltiplicheranno i 5 dan. per 7 e si avranno 35 dan. cioè 24 +11 dan.; si scriveranno dunque 11 dan. nella prima colonna e si riterranno 24 dan., cioè 2 sold. per aggiungerli al prodotto pei soldi, e così di seguito.

241. 2° Caso. *Quando il moltiplicatore sia complesso, si farà il prodotto del moltiplicando per la prima parte a sinistra del moltiplicatore* (come nel n.° precedente), *indi si dividerà ciascuna delle altre in parti aliquote di una unità della specie che la precede, e così i rimanenti prodotti parziali si avranno prendendo prima una certa parte del moltiplicando, e poi di ciascun prodotto precedente.*

Si domanda il costo di 2 can. 6 pal. 5 onc. 3 min. di una stoffa, essendo 4 lir. 9 sold. 7 dan. quello di 1 can.

	Lire.	Soldi.	Danari.	
	4	9	7	
	2c.	6p.	5o.	2m.
per 2 can...	8	19	2	
per 4 pal...	2	4	$9\frac{1}{2}$	
per 2 pal...	1	2	$4\frac{3}{4}$	
per 1 pal.........				11 sold. $2\frac{3}{8}$ dan.
per 4 onc..........		3.....	$8\frac{19}{24}$	
per 1 onc...............			$11\frac{19}{96}$	
per 1 min			$2\frac{23}{96}$	
per 1 min			$2\frac{23}{96}$	
	13	1	$4\frac{23}{32}$	

Si farà il prodotto del moltiplicando per 2 canne, come nel n.° precedente e si avrà 8 lir. 19 sold. 2 dan. Indi si divideranno i 6 pal. in 4+2 pal., e si dirà: se il moltiplicando è il costo di 1 can., per avere il costo di 4 pal., cioè per mezza canna, si dovrà prendere la metà del moltiplicando: questa metà è 2 lir. 4 sold. $9\frac{1}{2}$ dan. Dopo ciò, si prenderà la metà di quest' ultimo prodotto per avere il prodotto per 1 pal. ch' è 11 sol. $2\frac{3}{8}$ dan. il quale servirà in appresso, e che non dovendo entrare nella somma, si scriverà fuori. Le 5 onc. si divideranno in 4+1 onc., e siccome 4 onc. sono la terza parte di 1 pal. così bisognerà prendere la terza parte del prodotto di 1 pal., si prenderà poi la quarta parte del prodotto trovato, e si avrà il prodotto per l' altra oncia. I 2 min. si divideranno in 1+1 min. e per avere il prodotto per ciascun minuto si prenderà la quinta parte dell' ultimo prodotto trovato. Sommati tutti questi prodotti parziali, si ha il prodotto totale 13 lir. 1 sold. $4\frac{23}{32}$ dan.

La moltiplicazione dei nnmeri complessi potrebbesi anche operare, riducendo tanto il moltiplicando quando il moltiplicatore a numeri incomplessi della prima o dell' ultima specie, moltiplicando i due risultamenti e poi riducendo il prodotto a numero complesso della specie indicata dalla quistione; ma la maniera indicata innanzi detta di *prendere in parti*, resa familiare coll' esercizio, è molto più semplice.

242. Divisione. Siccome il dividendo è sempre un prodotto i cui fattori sono il divisore e il quoziente, così nella divisione dei numeri complessi vi sono due casi da considerare: quanto il moltiplicatore rappresenti il divisore o il quoziente; allora di questi due quello ch'è il moltiplicatore sarà astratto, l'altro sarà concreto e della medesima specie del dividendo.

1.° Caso. *Quando il divisore sia astratto lo si riduca, se già non sia tale, ad incomplesso, e si divida per esso ciascuna parte del dividendo, riducendo i resti successivi ad unità della specie seguente ed aggiungendoli alle parti seguenti del dividendo per formare i vari dividendi parziali.*

Si vuol conoscere qual è il costo di 1 can. di una stoffa della quale 15 can. han costato 112 lir. 8 sold. 4 dan.; è chiaro che bisognerà prendere la quindicesima parte del costo dato.

Lire.	Soldi.	Danari.	
112	8	4	15
7			7 lir. 9 sold. 10$\frac{2}{3}$ dan.
20			
140			
8			
148 sold.			
13			
12			
26			
13			
156			
4			
160 sold.			
10			

La prima parte 112 lir. del dividendo divisa per 15, dà 7 lir. col resto 7 lir.; si moltiplicherà questo resto per 20, e si ridurrà così a soldi, e aggiunti gli 8 soldi del dividendo, si avranno in tutto sold. 148, che divisi per 15, dànno 9 sold. col resto 13 sold. che si moltiplicheranno per 12 e si ridurranno a danari; si aggiungeranno al prodotto i 4 dan. del dividendo e si dividerà il tutto 160 dan. per 15, e così di seguito.

Quando il divisore sia di una sola cifra si può fare a meno di scrivere tutti i resti successivi nel modo indicato, essendo facilissimo di operare mentalmente, come si è fatto nella moltiplicazione, prendendo una certa parte di ciascun prodotto parziale.

Se il divisore sia complesso, ma astratto, lo si ridurrà a incomplesso dall' ultima specie, e poi si opererà come innanzi.

243. 2.° Caso. *Quando il divisore sia concreto, si riduca tanto il dividendo quando il divisore a numeri incomplessi o entrambi della prima specie, o dell'ultima specie, si dividano l'uno per l'altro i due numeri che risultano, e il quoziente che sarà un numero astratto indicherà quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.*

Questa regola è troppo chiara perchè punto non abbisogni di esempio.

CAPITOLO VIII.

RAGIONI E PROPORZIONI.

Ragioni per differenza e per quoziente.

244. Abbiamo studiato fin qui i numeri dal lato della loro costruzione, o generazione elementare; abbiamo insomma percorsi tutti i casi del calcolo aritmetico. Diremo ora delle proprietà principali che derivano dal loro confronto.

Il paragone non può cadere che fra due quantità dello stesso genere; sarebbe, per esempio, vuoto affatto di senso il domandare quanto è la quantità 3 canne rispetto all'altra 5 ore. Ora paragonando fra loro due quantità dello stesso genere, due casi possono darsi: o elle sono uguali, o non sono. Nel caso che sieno disuguali, la scambievole loro relazione di quantità, può considerarsi sotto due aspetti differenti: o si cerca sapere di quanto la maggiore supera la minore, o quante volte la minore è contenuta nella maggiore. Si risponde alla prima quistione togliendo la quantità minore dalla maggiore; si risponde alla seconda dividendo la maggiore per la minore. La prima maniera di paragone si suol chiamare *ragione per differenza*, o semplicemente *differenza* delle due quantità; la seconda *ragione per quoziente*, o semplicemente *quoziente o rapporto*. Si suole anche usare l'espressione di *ragione aritmetica* per la prima e di *ragione geometrica* per la seconda; ma elle sono da rigettare, essendo, come osserva l'Eulero, arbitrarie e non avendo niuna relazione alle cose ch'esprimono.

Adunque la ragione per differenza tra 5 e 2 è 5—2, cioè 3, e si suole indicare così, 5.2. I numeri 5 e 2 si chiamano *termini* della

ragione; 5 è l'*antecedente*, e 2 il *conseguente*. Per quello che si è detto nel n.° 34, se si aumenta di una stessa quantità ciascuno dei termini di una ragione per differenza, questa ragione non cangia.

Quando si voglia esprimere la ragione per quoziente fra due quantità dello stesso genere, due casi possono avvenire: o elle hanno una comune misura, o no, cioè o sono commensurabili o incommensurabili. Quando sono commensurabili, o la minore entra un numero esatto di volte nella maggiore, per esempio, cinque volte, e allora il loro rapporto è quello di 1 a 5 che si scrive 1 : 5, ed uno dei termini della ragione è sempre l'unità; o ci ha una quantità minore di entrambe e dello stesso genere che entra un certo numero di volte esattamente nell'una e un altro certo numero di volte esattamente nell'altra: se, per esempio, entri tre volte in una e 7 nell'altra, il rapporto delle due quantità sarà 3 : 7. Ora, siccome questi due casi solamente ponno avvenire nel paragone delle quantità commensurabili, così per esprimere che due quantità sono commensurabili, si dice che stanno fra loro come due numeri interi.

245. Alcune volte però i termini di un rapporto potrebbero essere o un intero ed una frazione o due frazioni, ma sarà facile di ridurre sempre questo rapporto a quello di due numeri interi. Infatti, poichè un rapporto altro non è che il quoziente di una delle quantità divisa per l'altra, sicchè 5 : 2 esprime che la prima quantità è i $\frac{5}{2}$ della seconda, e la seconda i $\frac{2}{5}$ della prima, segue che si dee dire dei termini di un rapporto quel medesimo che dei termini di una frazione; onde *moltiplicando o dividendo per un medesimo numero i due termini di un rapporto, questo non cangia.* Ora quando si abbia il rapporto $3 : \frac{2}{5}$, riducendo 3 a denominatore 5, si cangerà in quest'altro $\frac{15}{5} : \frac{2}{5}$, e moltiplicando ciascuno dei termini per 5, cioè sopprimendo i denominatori, si avrà 15 : 2. Ora si noti che il primo rapporto $3 : \frac{2}{5}$, non esprimendo distintamente quante volte l'aliquota comune era contenuta in ciascuna delle quan-

tità che si erano paragonate, non ci esprimeva chiaramente questo rapporto; ma noi abbiamo trovata la comune misura fra 3 e $\frac{2}{5}$ ch'è $\frac{1}{5}$, e siccome questa è contenuta 15 volte in 3 e 2 volte in $\frac{2}{5}$, il vero rapporto delle due quantità è 15 : 2. Il simile si farebbe se i termini del rapporto fossero due frazioni, cioè si ridurrebbero queste frazioni allo stesso denominatore, e i numeratori delle nuove frazioni sarebbero i termini del rapporto cercato. Generalmente i termini di un rapporto sono due numeri astratti i quali esprimono quante volte l'aliquota comune è contenuta in ciascuna delle due quantità che si paragonano. Se l'aliquota comune è la quantità minore, uno dei termini del rapporto sarà l'unità.

246. Il rapporto 12 : 9 si riduce a 4 : 3, dividendo ciascun termine per 3. Ora la prima forma di questo rapporto indicava che una comune misura entrava 12 volte in una delle quantità che si paragonano e 9 nell'altra; la seconda esprime che un'altra comune misura entra 4 volte nell'una e 3 nell'altra; ora si vede che questa seconda aliquota comune è maggiore della prima e propriamente ne è tripla; di più ella è la massima comune misura delle due quantità, perocchè i termini 4 e 3 essendo primi fra loro, non hanno più divisor comune. Si può dunque stabilire la regola seguente: *per avere la più semplice espressione del rapporto di due quantità espresse in numeri, si trovi il massimo comun divisore fra questi numeri, il quale esprimerà la massima comune misura fra le due quantità, e diviso ciascuno dei numeri dati per questo massimo comun divisore, i due quozienti saranno i termini del rapporto cercato.*

In un modo analogo si opererà qualora le due quantità non siano espresse in numeri. Volendo, per esempio, trovare la massima comune misura tra due linee rette assegnate graficamente, si vedrà quente volte la minore è contenuta nella maggiore, adattandola successivamente su di questa quante volte si possa, indi si vedrà similmente quante volte il resto è contenuto nella minore, poi quante volte il resto secondo è contenuto nel resto primo, e così di seguito; quando si giungerà ad un resto che sia contenuto un esatto numero di volte nel precedente, quest'ultimo re-

sto sarà la comune misura delle due linee rette date, e sarà facile vedere quante volte questa comune misura è contenuta in ciascuna delle due linee rette. Supponiamo ch'entrasse 7 volte nell'una e 13 nell'altra; queste rette staranno fra loro come 7 a 13; sicchè se si prendesse per unità la comune misura, la prima quantità sarebbe espressa dal numero intero 7, la seconda da 13; se si prendesse la prima per unità, la seconda sarebbe espressa dalla frazione $\frac{13}{7}$; se si prendesse per unità la seconda, la prima sarebbe rappresentata da $\frac{7}{13}$.

247. Una di queste frazioni potrebbe anche ridursi a frazione continua; riducendo, per esempio la prima, si avrebbe $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}$ pel rapporto delle due quantità proposte. L'operazione stessa che ci ha fatto trovare il rapporto 7 : 13, poteva darci questa frazione continua, cioè i denominatori delle varie frazioni che costituiscono la frazione continua, sono i vari quozienti ottenuti con questa operazione, ovvero i numeri ch'esprimono quante volte ciascun resto è contenuto nel precedente; la parte intera è il primo di questi quozienti, cioè quello che indica quante volte la quantità minore è contenuta nella maggiore. Quando le due quantità proposte siano incommensurabili, l'operazione indicata non ha mai fine, onde la frazione continua sarà d'infiniti termini, e a misura che se ne calcolerà un numero maggiore, il rapporto sarà espresso sempre con minore errore. Per esempio, il lato del quadrato e la sua diagonale sono due linee rette incommensurabili; portando il lato sulla diagonale, esso ci entra 2 volte con un resto; portando questo resto sul lato, ci entra anche 2 volte con un resto; questo secondo resto entra nel primo 2 volte con un resto, e in Geometria si dimostra che il medesimo avviene di tutti gl'infiniti altri resti [1]; onde la frazione continua ch'esprime il rapporto cercato,

[1] Vedi la Geometria del Legendre nell'ultimo dei problemi relativi al libro III.

sarà : $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$ ec. all' infinito.

248. Non è da credere che due quantità incommensurabili ad una terza siano di necessità incommensurabili fra loro; per esempio, $\sqrt{12}$ e $\sqrt{3}$ sono entrambe due quantità incommensurabili coll' nnità, intanto sono commensurabili fra loro, perchè si ha $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=\frac{2}{1}$; dal che si vede che $\sqrt{12}$ è doppio di $\sqrt{3}$.

Delle equidifferenze.

249. *Si chiama* equidifferenza *l'uguaglianza di due ragioni per differenza*. Così $10-7=8-5$ è una equidifferenza, o come si suole anche chiamare, ma impropriamente, una *proporzione aritmetica*.

Le equidifferenze si sogliono comunemente scrivere così, $10.7 : 8.5$.

250. Poichè $10-7=8-5$ se si aggiunge tanto al primo quanto al secondo membro la quantità $7+5$, cioè la somma dei sottrattori, si avrà $10+5=7+8$; dunque *in ogni equidifferenza la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei medi.*

Viceversa, da $10+5=7+8$ si passa all' equidifferenza $10-7=8-5$; dunque *se la somma di due numeri sia uguale alla somma di due altri, questi quattro numeri formeranno una equidifferenza, e i due numeri della stessa somma dovranno stare entrambi per termini estremi, o per termini medi.*

251. In una equidifferenza i tre primi termini possono prendersi ad arbitrio, ma il quarto rimane determinato da questi tre. Infatti si sottragga 10 tanto dal primo quanto dal secondo membro dell'uguaglianza $10+5=7+8$; si avrà $5=7+8-10$; dunque nella equidifferenza $10.7 : 8.5$ il quarto termine 5 si ottiene sommando i due medi 7 e 8 e sottraendo 10 dalla loro somma. Se dunque si

diano arbitrariamente i tre primi termini 13, 7, 9 di una equidifferenza, il quarto si otterrà, facendo $7+9-13=3$; onde si avrà 13.7 : 9.3. Generalmente *il quarto termine di un' equidifferenza è uguale alla somma dei medi, meno l'altro estremo.*

252. Una equidifferenza si chiama *continua*, quando i termini medi siano uguali, e si indica col segno ÷; così ÷ 19, 15, 11 è lo stesso che 19.15 : 15.11. Sommando i termini estremi fra loro e i medi fra loro, si ha $19+11=2\times 15$, e dividendo per 2 il primo e il secondo membro, $\frac{19+11}{2}=15$; dunque *in una equidifferenza continua il termine medio è uguale alla semisomma dei due estremi.*

Il termine medio di una equidifferenza è detto anche impropriamente *medio aritmetico*. Esso supera il minore dei due numeri della metà della loro differenza e manca dal maggiore di questa stessa metà; infatti $\frac{19+11}{2}=\frac{22+8}{2}=\frac{22}{2}+\frac{8}{2}=11+4$; 4 è la metà della differenza dei due numeri 19 e 11, onde si vede che il medio aritmetico fra questi due numeri supera il minore 11 della metà della loro differenza; quindi anche manca da 19 di questa stessa metà. Dunque il medio aritmetico fra due numeri è quel numero che ha un valore intermedio tra questi due, e dista ugualmente da ciascuno di essi.

Delle proporzioni.

253. *Dicesi* proporzione *l'uguaglianza di due rapporti*. Così $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ è una proporzione, e si suole scrivere ordinariamente così, 5.7 :: 15 : 21. Si suole anche usare l'espressione di *proporzione geometrica*, ma com'ella non ha niun significato, la si può rigettare e dire solamente *proporzione*, chiamando *equidifferenza* quella che si dice *proporzione aritmetica*.

I due rapporti potrebbero anche essere incommensurabili, e potrebbe dimostrarsi la loro uguaglianza senza ch'ei sappiansi esprimere esattamente. Così in geometria si dimostra che nel medesimo cerchio o in cerchi uguali gli angoli al centro stanno sem-

cando primo e secondo membro per 7×21, cioè togliendo via i denominatori, $5\times21=15\times7$, ch'è ciò che si voleva dimostrare.

Viceversa da $5\times21=15\times7$, dividendo primo e secondo membro per 7×21, si passa a $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ e quindi a $5:7::15:21$; dunque *se si abbiano due prodotti uguali di due fattori ciascuno, questi quattro fattori formeranno una proporzione, e i fattori del medesimo prodotto si dovranno trovare entrambi per termini estremi, o per termini medi.*

257. Nell'uguaglianza $5\times21=15\times7$, dividendo primo e secondo membro per 5, si ha $21=\frac{15\times7}{5}$, cioè *in ogni proporzione i tre primi termini sono arbitrari ed il quarto è sempre uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo.*

258. *Proporzione continua* è quella che ha i termini medi uguali, e s'indica col segno ∺; così ∺ 8, 4, 2 è lo stesso che $8:4::4:2$. Poichè il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei medi, avremo $4^2=8\times2$ e quindi $4=\sqrt{8\times2}$; onde la *media proporzionale fra due numeri dati è la radice quadrata del loro prodotto.*

259. Quando si ha una proporzione, si ponno disporre in più modi differenti i suoi termini, senza alterare la proporzione; queste varie disposizioni sono quelle che fanno sempre rimanere il prodotto dei termini estremi uguale a quello dei medi. Ecco, per esempio, quali disposizioni differenti si ponno dare ai termini della proporzione $15:6::5:2$,

$15:\ 6::\ 5:\ 2$
$15:\ 5::\ 6:\ 2$ *permutando*
$6:15::\ 2:\ 5$ *invertendo*
$5:15::\ 2:\ 6$
$6:\ 2::15:\ 2$
$5:\ 2::15:\ 6$
$2:\ 6::\ 5:15$
$2:\ 5::\ 6:15$

La seconda disposizione è nata dal paragonare gli antecedenti fra loro e i conseguenti fra loro, e si suole nominare colla parola

latina *componendo;* ella non può aver luogo che in quelle proporzioni nelle quali tutti i termini siano dello stesso genere, perocchè altrimenti verrebbonsi a paragonare fra loro due cose eterogenee, il che è assurdo. La seconda disposizione che si dinota colla parola *invertendo* consiste nello scrivere in ordine inverso i termini di ciascuna ragione, cioè nel passare l'antecedente a conseguente e il conseguente ad antecedente; le rimanenti si hanno operando queste due disposizioni principali sulle due ultime proporzioni e poi a mano a mano su quelle che ne derivano, tralasciando di scrivere quelle avute innanzi. Tutte queste disposizioni, come si può vedere, non alterano l'uguaglianza $15\times2=6\times5$; onde elle dànno tante altre proporzioni.

260. Due rapporti uguali ad un terzo sono uguali fra loro; onde *se due proporzioni hanno un rapporto di comune, gli altri due saranno anche uguali e daranno una proporzione.* Così avendo 5 : 7 :: 10 : 14 e 5 : 7 :: 15 : 21, se ne deduce 10 : 14 : 15 : 21.

261. *Se si moltiplicano o si dividono gli antecedenti o i conseguenti di una proporzione per un medesimo numero, la proporzione non si altera.* Infatti se abbiasi 3 : 2 : 12 : 8, *permutando,* si avrà 3 : 12 :: 2 : 8; in quest' ultima i termini 3 e 12 si ponno moltiplicare o dividere per lo stesso numero senza che la ragione, e però anche la proporzione cangi; ma 3 e 12 sono gli antecedenti della prima; dunque ec.

262. *In ogni proporzione un antecedente più o meno il suo conseguente, sta a questo conseguente, come l'altro antecedente più o meno il suo conseguente, sta al suo conseguente.* Sia 6 : 2 :: 21 : 7; *permutando*, si ha 6 : 21 :: 2 : 7, ovvero $\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$; la quale uguaglianza dà, secondo il n.° 164, $\frac{6\pm2}{21\pm7}=\frac{2}{7}$, dalla quale risultano le proporzioni:

$$6+2 : 2 :: 21+7 : 7 \text{ componendo}$$
$$6-2 : 2 :: 21-7 : 7, \text{ dividendo}$$

le quali si dinotano colle parole *componendo* e *dividendo.*

263. *Permutando* in queste due proporzioni, si ha

$$6+2 : 21+7 :: 2 : 7$$
$$6-2 : 21-7 :: 2 : 7,$$

cioè, *la somma o la differenza dei termini di una ragione sta alla somma o alla differenza dei termini dell' altra ragione come gli antecedenti fra loro o come i conseguenti fra loro.*

264. Queste due ultime proporzioni, avendo il rapporto 2 : 7 di comune, ci dànno:

$$6+2 :: 21+7 :: 6-1 : 21-7,$$

cioè *la somma dei termini di una ragione sta alla somma dei termini dell' altra, come la differenza dei primi sta alla differenza dei secondi.*

265. E *permutando* si ha:

$$6+2 : 6-1 :: 21+7 : 21 : 7;$$

dunque *la somma dei termini di una ragione sta alla loro differenza come la somma dei termini dell' altra sta alla loro differenza.*

Queste due ultime proporzioni, paragonate a quelle del n.° 262 dalle quali sonosi dedotte, ci fanno vedere, che *se due proporzioni abbiano gli stessi antecedenti o gli stessi conseguenti, i conseguenti o gli antecedenti staranno in proporzione.*

266. *Quando due proporzioni abbiano gli stessi termini estremi o gli stessi termini medi, i loro termini medi o estremi staranno in ragion reciproca fra loro.*

Siano le due proporzioni 3 : 2 : 6 : 4 e 3 : 1 : :: 12 : 4; uguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi, sarà $3\times4=2\times6$ e $3\times4=1\times12$, e quindi $2\times6=1\times12$; dalla quale uguaglianza risulta la proporzione 2 : 1 :: 12 : 6, come si voleva dimostrare. Le due proporzioni proposte, *invertendo*, riduconsi a 2 : 3 :: 4 : 6 e 1 : 3 :: 4 : 12; onde la dimostrazione vale anche pel caso in cui le due proporzioni abbiano gli stessi antecedenti.

267. *Se si abbia un numero qualunque di rapporti uguali, sarà sem-*

pre la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti come un antecedente al suo conseguente. Sia

$$2:3::4:6::8:12::16:24::32:48,$$

o che torna lo stesso,

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24}=\frac{32}{48};$$

da queste uguaglianze si ricava, pel n.° 164,

$$\frac{2+4+8+16+32}{3+6+12+24+48}=\frac{32}{48};$$

dalla quale si passa alla proporzione

$$2+4+8+16+32:3+6+12+24+48::32:48.$$

268. *Se più proporzioni si moltiplichino* per ordine, *ne nascerà un'altra proporzione.* Abbiansi le proporzioni:

$$\begin{array}{l} 2:5::6:15 \\ 3:7:9:21 \\ 4:10::8:20; \end{array}$$

queste equivalgono rispettivamente a

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15},\ \frac{3}{7}=\frac{9}{21},\ \frac{4}{10}=\frac{8}{20};$$

moltiplicando fra loro i primi membri, il prodotto sarà uguale a quello dei secondi membri, e si avrà,

$$\frac{2\times3\times4}{5\times7\times10}=\frac{6\times9\times8}{15\times21\times20},$$

e da questa uguaglianza si passa alla proporzione

$$2\times3\times4 : 5\times7\times10 :: 6\times9\times8 : 15\times21\times20$$

che paragonata colle tre proposte farà manifesta la proposizione enunciata.

269. Le proporzioni che si moltiplicano *per ordine* potrebbero essere tutte fra loro uguali, ed allora è chiaro che si viene ad elevare ciascun termine a una medesima potenza; dunque *elevando ciascun termine di una proporzione ad una stessa potenza, questa proporzione non cangia*. Così, avendo 5 : 2 :: 15 : 6, se ne ricavano tutte queste altre:

$$5^2 : 2^2 :: 15^2 : 6^2$$
$$5^3 : 2^3 :: 15^3 : 6^3$$
$$5^4 : 2^4 :: 15^4 : 6^4$$
$$\cdots\cdots$$

270. ***Estraendo una stessa radice dai termini di una proporzione, questa non cangia.*** Sia 3:4 :: 6:8, ovvero $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$; estraendo la stessa radice, per esempio, la cubica dal primo e dal secondo membro si avrà $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}}$, ovvero $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{4} :: \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{8}$; onde dalla proporzione proposta si deducono tutte le seguenti

$$\sqrt{3} : \sqrt{4} :: \sqrt{6} : \sqrt{8}$$
$$\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{4} :: \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{8}$$
$$\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{4} :: \sqrt[4]{6} : \sqrt[4]{8}$$
$$\cdots\cdots$$

271. *Due frazioni di medesimo denominatore stanno fra loro come*

i rispettivi numeratori. Infatti, si abbia il rapporto $\frac{2}{7}:\frac{5}{7}$; moltiplicando ciascun termine per 7, cioè togliendo via i denominatori, questo non cangia, e si avrà $\frac{2}{7}:\frac{5}{7}::2:5$.

272. *Due frazioni di medesimo numeratore stanno fra loro in ragione inversa dei loro rispettivi denominatori*. Nel rapporto $\frac{2}{5}:\frac{2}{7}$, si riducano le due frazioni allo stesso denominatore, e si avrà $\frac{2\times7}{5\times7}:\frac{2\times5}{7\times5}$, e moltiplicando per 5×7 ciascun termine, $2\times7:2\times5$; in ultimo dividendo per 2 i termini di quest' ultimo rapporto, quello delle due frazioni proposte, si ridurrà a $7:5$; sicchè sarà, come si voleva dimostrare, $\frac{2}{5}:\frac{2}{7}::7:5$.

Della ragion composta.

273. *Una ragione per quoziente dicesi* composta *di più altre, quando ella abbia per antecedente il prodotto degli antecedenti e per conseguente il prodotto dei conseguenti di queste altre.*

Così, se si abbiano i rapporti $3:7$, $2:5$, $4:6$, la ragion composta di questi tre sarà $3\times2\times4:7\times5\times6$, ovvero $24:210$, e si suole indicare così:

$$24:210=(3:7)\times(2:5)\times(4:6).$$

Ci si presenterà molte volte in appresso l' occasione di vedere come in una quistione vi siano alcune quantità le quali hanno tali relazioni fra loro che due di esse stanno fra loro in ragion composta di tutte le altre ragioni.

274. *In una serie di numeri qualunque, sta sempre il primo all' ultimo in ragion composta del primo al secondo, del secondo al terzo, del terzo al quarto, ec.* Siano i numeri 3, 2, 5, 7, 11; le ragioni anzidette sono $3:2$, $2:5$, $5:7$, $7:11$, delle quali la ragion composta è $3\times2\times5\times7:2\times5\times7\times11$; dividendo ciascun termine per $2\times5\times7$; si ha $3:11$; dunque ec.

275. *Se più numeri siano* continuamente proporzionali *sarà il primo al terzo, come il quadrato del primo al quadrato del secondo, il primo al quarto come il cubo del primo al cubo del secondo, e così di seguito.* Siano i numeri 2, 4, 8, 16, 32, ec. *continuamente proporziali,* cioè sia $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32$ ec.; pel n.° precedente, la ragione del primo numero 2 a quello del terzo 8 è composta di quella di 2 a 4 e di quella di 4 ad 8, cioè $2 : 8 = (2 : 4) \times (4 : 8)$; sostituendo alle ragione $4 : 8$ la sua uguale $2 : 4$, si avrà $2 : 8 = (2 : 4) \times (2 : 4)$, cioè $2 : 8 :: 2^2 : 4^2$. Analogamente si dimostrerà $2 : 16 :: 2^3 : 4^3$, $2 : 32 :: 2^4 : 4^4$, ec.

276. *Due frazioni qualunque stanno fra loro in ragion composta della diretta dei numeratori e della inversa dei denominatori.* Il rapporto $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$, riducendo i termini allo stesso denominatore, e soppresso questo denominatore, si riduce a $2 \times 7 : 5 \times 3$; onde sarà $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = (2 : 5) \times (7 : 3)$.

CAPITOLO IX.

PROGRESSIONI E LOGARITMI.

Progressioni per differenza.

277. *Si chiama* progressione per differenza *una serie di numeri tali che la differenza fra due di essi consecutivi sia sempre la stessa:* anche si suol chiamare *progressione aritmetica.* La differenza costante è la *ragione* della progressione.

Queste che seguono sono due progressioni per differenze, scritte secondo l'uso comune,

$$\div 2.5.8.11.14.\text{ ec} \qquad \div 35.30.25.20.15.\text{ ec.}$$

La ragione della prima è 3, quella della seconda è 5. Nell'una i termini vanno crescendo, e però ella chiamasi *crescente* o *ascendente*; la seconda in cui i termini vanno decrescendo, si chiama *decrescente* o *discendente.*

278. È chiaro che il secondo termine è uguale al primo più o meno la ragione, il terzo è uguale al secondo più o meno la ragione, ovvero al primo più o meno due volte la ragione, e così il quarto sarà uguale al primo più o meno tre volte la ragione, ec. In generale *secondo che una progressione per differenza sia crescente o decrescente, un termine qualunque è uguale al primo più o meno la ragione ripetuta tante volte, quanti sono i termini che lo precedono.*

Dunque, se dato, per esempio, il primo termine 4 di una progressione crescente e la ragione 5, si voglia sapere quale sarà il

nono termine, senza conoscere gl' intermedi, si farà $4+8\times5$; sicchè il termine cercato è 44. Per convincersi si formi la progressione crescente col primo termine 4 e colla ragione 5, e si avrà,

$$\div 4.9.14.19.24.29.34.39.44.\ \text{ec.}$$

nella quale il nono termine è appunto 44.

Similmente dato, per esempio, il primo termine 80 di una progressione decrescente e la ragione 9, volendo il settimo termine, questo sarà $80-6\times9$, cioè 26. Formando infatti la progressione fino al settimo termine, si trova,

$$\div 80.71.62.55.44.35.26.\ \text{ec.}$$

279. Un altro problema di cui tratteremo, è il seguente: *inserire fra due numeri proposti un dato numero di medi aritmetici*, ch' è quanto dire formare una progressione per differenza di cui siano dati i due termini estremi e il numero dei termini. Supporremo che la progressione sia sempre crescente, cioè che il primo termine sia il minore dei due numeri dati, perchè nel caso che sia decrescente, trovati i medi aritmetici come se fosse crescente, non si avrà che a scrivere poi la progressione in senso inverso.

Tra i due numeri 7 e 32 si vogliano inserire 4 medi aritmetici. Nella progressione che si formerà 32 sarà preceduto da questi quattro termini cercati e dal primo, cioè sarà preceduto da 5 termini; dunque esso è uguale al primo termine, più cinque volte la ragione; questa ragione è ignota, e s' ella si trovasse, il problema sarebbe sciolto, perchè coll' addizione successiva di questa ragione al primo termine si formerebbe la progressione cercata. Ora se 32 è uguale al primo termine 7 più 5 volte la ragione, tolto 7 da 32, si avrà 25 che sarà il quintuplo della ragione, e però dividendo 25 per 5, la ragione cercata sarà 5. Formando ora la progressione col primo termine 7 e colla ragione 5, si avrà,

$$\div 7.12.17.22.27.32;$$

dunque tra 7 e 32 si sono inseriti i quattro medi aritmetici 12,

17, 22, 27, come si richiedeva. Adunque *la ragione si ottiene togliendo il numero minore dal maggiore, e dividendo il resto pel numero dei medi aritmetici cercati, più uno.*

Cinque cose sono da considerare in una progressione per differenza, ciò sono *il primo termine, l'ultimo termine, la ragione, la somma dei termini, e il numero dei termini.* Ora queste cinque cose hanno tal relazione fra loro, che date tre di esse, la quarta rimane intieramente determinata; dei 10 problemi che così nascono, due soli abbiamo noi trattati, cioè quelli in cui l'ignota è l'ultimo termine o la ragione; lasceremo all'algebra lo svolgimento completo di questa materia.

Progressioni per quoziente.

280. *Dicesi* progressione per quoziente *una serie di numeri tali che il rapporto fra due di essi consecutivi sia sempre lo stesso.* Questo rapporto o quoziente costante è la ragione della progressione. Si suole anche usare l'espressione di *progressione geometrica.* Si dicono poi queste progressioni, *crescenti* e *decrescenti*, o pure *ascendenti* e *discendenti* nel medesimo senso che per le progressioni per differenza. Ecco due progressioni per quoziente, l'una crescente, l'altra decrescente:

$$\div\div 3 : 9 : 27 : 81 : \qquad \div\div 104 : 52 : 26 : 15 : \text{ec.}$$

Nella prima la ragione è 3, nella seconda è $\frac{1}{2}$.

281. Il secondo termine è uguale al primo moltiplicato per la ragione; il terzo è uguale al secondo moltiplicato per la ragione, ovvero al primo moltiplicato per il quadrato della ragione e così il quarto sarà uguale al primo moltiplicato pel cubo della ragione, ec. Generalmente *un termine qualunque è uguale al primo moltiplicato per quella potenza della ragione indicata dal numero dei termini che lo precedono.* Se si domanda il quinto termine della progressione per quoziente, la cui ragione sia 4 e il primo termine 7, questo sarà $7\times4^4=1792$. Infatti formando i primi cinque termini della progressione per quoziente, il cui primo termine sia 7 e la ragione 4, si trova,

$$\div\!\div 28 : 112 : 448 : 1792 : \text{ec.}$$

Se si voglia il quarto termine di una progressione la cui ragione sia $\frac{1}{3}$ e il primo termine 60, si farà $60\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{60}{27}=\frac{20}{9}$. Infatti la progressione fino al quarto termine è,

$$\div\!\div 60 : 20 : \frac{20}{3} : \frac{20}{9} : \text{ec.}$$

282. Volendo inserire 3 medi proporzionali fra 2 e 162, si osserverà ch'essendo 162 il prodotto del primo termine per la quarta potenza della ragione, se si divide 162 per 2, il quoziente 81 sarà la quarta potenza della ragione; onde questa ragione sarà $\sqrt[4]{81}=3$. Trovata la ragione, si moltiplicherà successivamente per essa il primo termine e si avrà la progressione

$$\div\!\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{ec.};$$

sicchè 6, 18, 54 sono i tre medi proporzionali richiesti. In generale dunque *la ragione si ottiene dividendo il maggiore dei due numeri dati pel minore ed estraendo dal quoziente quella radice indicata dal numero dei medi geometrici richiesti, più uno.*

Anche nelle progressioni per quoziente sono da considerare le stesse cinque cose che in quelle per differenza; noi qui pure dei 10 problemi abbiamo esposti solamente i due in cui le ignote sono l'ultimo termine, o la ragione.

Logaritmi.

283. Si noti che le proprietà delle progressioni per quoziente si cangiano in quelle delle progressioni per differenza, sostituendo alla moltiplicazione e alla divisione l'addizione e la sottrazione; all'elevamento a potenza e all'estrazione di radici la moltiplicazione e la sottrazione. Da una considerazione così semplice il genio del barone scozzese Nepero seppe trarre la teorica dei *logaritmi*,

scoperta di una utilità immensa, e che noi non intendiamo di svolgere qui intieramente, ma daremo una idea delle principali loro proprietà, a fine che non se n' entri affatto nuovi in algebra, ove si tratta completamente di una tale materia.

Siano due progressioni, una per quoziente che cominci da 1, l' altra per differenza che cominci da 0, come le seguenti

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : ec.
÷ 0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . ec.

Poichè il primo termine della prima è 1, e il primo della seconda è 0, è chiaro che un termine dell' una è uguale alla ragione presa per fattore tante volte quanti sono i termini che lo precedono, e un termine dell' altro è uguale alla ragione aggiunta tante volte quanto sono i termini che lo precedono. Chiamando ciascun numero della seconda progressione il *logaritmo* del corrispondente della prima, avremo, per quello che si è detto, che *la ragione è tante volte fattore in un numero quante volte ella è aggiunta nel suo logaritmo.*

Questa corrispondenza dei termini della prima a quelli della seconda ha fatto dare il nome di logaritmo a questi ultimi, sicchè *i logaritmi sono alcuni numeri in progressione per differenza i quali corrispondono ad altri numeri in progressione per quoziente.* Le proprietà utilissime dei logaritmi si ricavano dal supporre, come noi abbiam fatto, che la prima progressione cominci da 1 e la seconda da 0.

284. Moltiplichiamo due termini 2 e 16 della prima ed aggiungiamone i due logaritmi 3 e 12, il prodotto dei due primi ha per logaritmo la somma dei secondi, cioè a 32 nella prima corrisponde 15 nella seconda, il che s' enuncia con dire che *il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.* Infatti, essendo la ragione elevata a prima potenza nel termine 2 ed a quarta in 16, nel prodotto 32 sarà elevata a quinta potenza (134); e la ragione della seconda progressione trovandosi presa una volta in 3 e quattro volte in 12, sarà presa cinque volte in 15; onde 15 è il logaritmo di 32.

285. Di qui si deduce che il doppio del logaritmo di un numero

è il logaritmo del quadrato di questo numero, che il triplo è il logaritmo del cubo; e che generalmente *il logaritmo della potenza di un numero è uguale al logaritmo di questo numero moltiplicato pel grado della potenza.*

286. *Il logaritmo del quoziente è uguale al logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore.* Infatti questa proposizione è inversa di quella del n.° 284 ove si è dimostrato che il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori; qui il prodotto è il dividendo e i due fattori sono il divisore e il quoziente.

287. *Il logaritmo della radice di un numero è uguale al logaritmo del numero diviso per l'indice della radice.* Questa proposizione si ricava da quella del n.° 285 di cui è l' inversa.

288. Si osservi ora che a misura che la ragione della progressione per quoziente si prenda più piccola, più i termini si avvicineranno, e vi si potrebbero trovare con un'approssimazione quanto si voglia grande i numeri 1, 2, 3, 4... Ora s' immagini una tavola nella quale si trovino questi numeri, considerati come termini di una progressione per quoziente di cui non siasi fatto conto degl'intermedi, e che siavi accanto di ciascuno il suo logaritmo, supponendo sempre che la ragione siasi presa tanto piccola nella prima da fornire una grande approssimazione; allora l'utilità di questa tavola consisterà in questo che volendo moltiplicare due numeri qualunque, si cercheranno in essa questi numeri, e si sommeranno i loro logaritmi; si troverà questa somma nella colonna dei logaritmi, e il numero corrispondente sarà il prodotto cercato; ciò si ricava dal n.° 284. Parimente si vedrà che la divisione di un numero per un altro si ridurrà a sottrarre il logaritmo del secondo da quello del primo; per elevare un numero a potenza si troverà il logaritmo di questo numero, lo si moltiplicherà pel grado della potenza, si troverà il prodotto nella colonna dei logaritmi e il numero corrispondente sarà la potenza cercata. Finalmente per estrarre una radice da un numero, si dividerà il logaritmo di questo numero per l' indice della radice, e trovato il quoziente nella colonna dei logaritmi, il numero corrispondente sarà la radice cercata.

CAPITOLO X.

PROBLEMI ARITMETICI.

Regola del tre.

289. Le quistioni che possono proporsi sui numeri trovano la piena loro soluzione nell'algebra, la quale solo le classifica secondo la varia natura loro e fornisce i metodi generali per ciascuna specie. Ma sono intanto alcuni problemi i quali si sciolgono facilmente col mezzo delle proprietà delle proporzioni di cui è stato parola nel capitolo precedente, e però ponno anche trovar luogo nell'aritmetica; essi sono di un uso frequente nella società e riduconsi tutti in sostanza alla così detta *regola del tre.*

Questa si divide in due specie: *regola del tre semplice*, quando i dati di un problema siano i tre primi termini di una proporzione di cui si cerchi il quarto; *regola del tre composta*, quando le cose date siano più di tre e faccia d'uopo ragionarvi prima sopra in modo da ricavarne poi una sola proporzione.

290. *Regola del tre semplice.* La norma per risolvere i problemi che appartengono a questa specie è la seguente: *si esamini se il rapporto delle due cose date dello stesso genere sia diretto o inverso per rispetto a quello della terza cosa data alla cercata dello stesso genere; s'intavoli poi convenientemente la proporzione, e la cosa cercata trovandosi per quarto termine della proporzione, sarà uguale al prodotto dei due medi diviso per l'altro estremo.*

291. Esempio I. *Se 27 canne di una certa stoffa sono costate 500 lire, quanto costeranno 48 canne della medesima stoffa?*

È chiaro che crescendo il numero delle canne, crescerà pur

quello delle lire ch' esse costeranno, e se il primo sarà doppio, il secondo sarà pur doppio, se triplo, triplo, ec.; generalmente il rapporto di 27 canne a 48 canne, sarà uguale a quello de' costi rispettivi di 500 lire alle lire che si domandano; onde s' intavolerà la proporzione $27^{c.} : 48^{c.} :: 500^{l.} : x$. Questo termine ignoto x, si otterrà facendo, $x = \frac{48 \times 500^{l.}}{27} = 888^{l.}\ 17^{s.}\ 9\frac{1}{3}^{d.}$.

II. *Un corriere colla velocità di 5 miglia ad ore ha fatto un certo cammino in 7 ore; si domanda in quanto tempo farà lo stesso cammino colla velocità di 3 miglia ad ore.*

Se la velocità diminuisce, il tempo che s' impiegherà a percorrere lo stesso cammino aumenterà, e generalmente le velocità sono in ragione inversa dei tempi rispettivi; onde la proporzione sarà $3 : 5 :: 7 : x$, e quindi $x = \frac{7 \times 5}{3} = 11\frac{2}{3}$.

Proporrò vari altri esempi per esercizio del lettore.

III. *Si domanda quanto tempo impiegheranno 15 lavoratori a compiere una certa opera, sapendosi che 26 lavoratori vi hanno impiegato 112 giorni.* Risposta: v' impiegheranno 224 giorni.

IV. *Determinare la somma che si ha, prendendo 4 danari per lira da 5000 lire.* Risposta: la somma è 83 lir. 6 sold. 8 dan.

V. *Il lavoro di 37 tese, 5 piedi e 8 pollici di una strada è costato 100 lire e 8 soldi; si domanda che lunghezza se ne farebbe per 658 lire e 10 soldi.* Risposta: se ne faranno 248 tes. 5 pied. $2\frac{137}{251}$ pollici.

VI. *Sono bisognati 6 metri di una stoffa larga $\frac{3}{4}$ per covrire una tavola; quanti metri ci vorranno di una stoffa larga $\frac{2}{3}$?* Risposta: metri $6\frac{3}{4}$.

292. ***Regola del tre composta.*** Abbiasi a risolvere la seguente quistione: *27 operai, lavorando 8 ore al giorno han fatto 52 tese di una certa opera in 13 giorni; si domanda quante tese ne faranno 30 operai in 15 giorni lavorando 10 ore al giorno.* I dati della quistione si dispongono nel modo seguente:

Operai.	Ore.	Giorni.	Tese.
27	8	13	32
30	10	15	x.

Nella prima linea sono le quantità che producono il primo effetto, contenute nel primo periodo dell' enunciato; nella seconda le date e l' incognita corrispondenti alle prime che producono il secondo effetto e che sono contenute nel secondo periodo. Ora io ragiono così: 27 operai lavorando 8 ore al giorno faranno il medesimo lavoro che 8 volte 27 operai lavorando 1 ora al giorno; parimente 30 operai lavorando 10 ore al giorno faranno il medesimo lavoro che 10 volte 30 operai lavorando 1 ora al giorno; sicchè la quistione proposta si è ridotta alla seguente: *27 ×8 operai, lavorando per 13 giorni han fatto 32 tese di una certa opera; quante tese ne faranno 30×10 operai in 15 giorni?* I dati si dispongono come segue.

Operai.	Giorni.	Tese.
27×8	13	32
30×10	15	x.

Qui pure dirò 27×8 operai in 13 giorni fanno lo stesso lavoro che 13 volte 27 × 8 operai in 1 giorno, e 30 × 10 operai in 15 giorni faranno lo stesso lavoro che 15 volte 30×10 operai in 1 giorno; onde il problema sarà ridotto a *determinare il lavoro che fanno 30×10×15 operai in un certo tempo sapendo che 27×8×13 operai ne han fatto nello stesso tempo 32 tese.* Questa è una regola del tre semplice, e si risolverà colla proporzione

$$27\times8\times13 : 30\times10\times15 :: 32^{t} : x;$$

la quale dà $x = \dfrac{30\times10\times15\times32^{t}}{27\times8\times13} = 54$ tes. 5 pied. 8 $\frac{16}{39}$ lin.

È da notare che il primo rapporto $27\times8\times13 : 30\times10\times15$ della proporzione or ora intavolata è la ragion composta delle altre $27:30$, $8:10$, $13:15$, che sono i rapporti diretti di tutte le altre quantità ch' entrano nel problema rispetto a quello della cosa data alla cosa cercata dello stesso genere.

293. Sia ancora la quistione: *se 20 operai, lavorando 8 ore al giorno han compito una certa opera in 15 giorni, quanti operai ci abbisogneranno per compiere la stessa opera in 30 giorni, lavorando 10 ore al giorno?* Esporremo i dati come prima.

Ore.	Giorni.	Operai.
8	15	20
10	30	x.

Un lavoro di 15 giorni a 8 ore al giorno è lo stesso che un lavoro di 8×15 giorni a 1 ora al giorno, e un lavoro di 30 giorni a 10 ore al giorno è lo stesso che un lavoro di 10×30 giorni a 1 ora al giorno; dunque la quistione si riduce a *determinare quanti operai ci abbisognano per compiere in 10×30 giorni un lavoro che da 20 operai è stato compiuto in 8×15 giorni*. Questa è una regola del tre semplice, ed esservando che il rapporto dei giorni è inverso di quello degli operai rispettivi, s' intavolerà la proporzione

$$10\times30 : 8\times15 :: 20 : x,$$

la quale dà $x = \frac{8\times15\times20}{10\times30} = 8$; dunque 8 operai ci abbisogneranno.

Qui pure osserveremo che il primo rapporto $10\times30 : 8\times15$ è la ragion composta dei due rapporti $10:8$, $30:15$, i quali esprimono che il rapporto delle ore di fatica è inverso rispetto agli operai rispettivi, cioè più ore si lavorerà, meno operai ci abbisogneranno; e che i giorni sono anche in ragione inversa degli operai. Stabiliremo dunque la seguente regola:

Si scrivano una dopo l' altra le quantità date che producono il primo effetto, e vi si pongano sotto le date e l' ignota corrispondenti

che producono il secondo effetto; indi si esamini se il rapporto di ciascuna delle prime alla corrispondente delle seconde sia diretto o inverso rispetto a quello della cosa data alla cosa cercata dello stesso genere. La proporzione del problema avrà per uno dei rapporti quest'ultimo e per l'altro la ragion composta di tutti gli altri rapporti che entrano nel problema, scritto ciascuno convenientemente, cioè che sia uguale al rapporto della cosa data alla cosa cercata dello stesso genere.

Applichiamo questa regola pratica ad alcuni esempi.

294. Esempio I. *Se 40 operai han fatto 300 metri in 8 giorni, lavorando 7 ore al giorno, quanto tempo impiegheranno 51 operaio a fare 459 metri lavorando 6 ore al giorno?* I dati si dispongono così:

Uomini.	Metri.	Ore.	Giorni.
40	300	7	8
51	459	6	x.

Il rapporto degli uomini è inverso rispetto a quello dei giorni, perchè più uomini lavorano meno tempo ci vuole; onde i secondi uomini staranno ai primi come i primi giorni ai secondi, cioè il rapporto degli uomini si dovrà scrivere 51 : 40 perchè sia uguale a quello di 8 : x. Il rapporto dei metri è diretto, cioè più metri si lavorano più tempo ci abbisogna, sicchè il rapporto dei metri si scriverà 300 : 459. Finalmente il rapporto delle ore è inverso, perchè più ore al giorno si lavora, meno tempo ci vuole; sicchè il rapporto delle ore si scriverà 6 : 7. Ora dei tre rapporti 51 : 40, 300: 459, 6 : 7 si farà la ragion composta che è $51\times300\times6 : 40\times459\times7$, cioè 9000 : 13520, e la proporzione del problema sarà 9000 : 13520 :: 8 : x; e quindi $x=\frac{8\times13520}{9000}=12\frac{4}{225}$

Qui ci hanno due rapporti inversi, quello degli uomini e quello delle ore, ed uno diretto, cioè quello dei metri; mentre nei problemi che ci han condotti alla regola erano tutti diretti o tutti inversi; onde noi, per provare la generalità di essa regola, faremo vedere come qui i ragionamenti sarebbero analoghi.

Se 40 uomini han fatto 300 metri, 1 metro sarà fatto da uomini $\frac{40}{300}$; e parimente se 51 uomini han fatto 459 metri, 1 metro sarà fatto da uomini $\frac{51}{459}$.

Adunque i due termini del rapporto degli uomini sono $\frac{40}{300}$ e $\frac{51}{459}$; questo rapporto non cangia se si moltiplichi ciascuno dei termini per 300×459, e si avrà $40\times459:51\times300$. Il problema si è dunque ridotto al seguente: *se 40×459 uomini, lavorando 7 ore al giorno, impiegano 8 giorni, quanto tempo impiegheranno 51×300 uomini lavorando 6 ore al giorno?* Qui i rapporti delle cose date sono entrambi inversi, onde si può applicare, come s'è veduto innanzi, la regola, e si ha la proporzione $51\times300\times6:459\times7::8:x$, ch'è appunto la medesima di quella trovata colla regola generale.

Questi altri problemi che seguono li risolverà il lettore per suo esercizio.

II. *36 operai, lavorando 8 ore al giorno hanno scavato in 16 giorni un fosso lungo 72 metri, largo 18 e profondo 12; si domanda quanto tempo impiegheranno 32 operai, lavorardo 12 ore al giorno, a scavare un fosso lungo 64 metri, largo 27, e profondo 18.* Risposta : 24 giorni.

III. *In una biblioteca s' impiegano a copiare alcuni manoscritti, due sezioni di amanuensi; gli uni lavorano il giorno, gli altri la notte e in un carattere differente da quello dei primi. Posto ciò,*

I primi, in numero di 24, han trascritto in 90 giorni, lavorando 8 ore al giorno, 8 esemplari di un'opera in 4°, contenente 6 volumi, e formante, l'una compensando l'altra, 480 pagine, ciascuna pagina 64 versi, e ciascun verso 56 lettere.

Si domanda in quante notti la seconda sezione composta di 30 copisti, i quali lavorano 6 ore la notte, trascriverà 6 esemplari di un'opera in folio, contenente 4 volumi, componente, l'una compensando l'altra, 800 pagine, ogni pagina 84 versi, ogni verso 80 lettere. Si suppone di più che la celerità dei primi copisti stia a

quella dei secondi : : *4* : *5*; *che la difficoltà di lavorare il giorno stia a quella di lavorare la notte* : : *5* : *6*; *che quella del carattere dei primi sta a quella del carattere dei secondi* : : *6* : *5*, *e in ultimo che quella di leggere la prima opera sta a quella di leggere la seconde* : : *8* : 7. Risposta: i secondi copisti impiegheranno notti $186\frac{2}{3}$.

Problemi d' interesse.

295. Colui che prende ad imprestito da un altro una certa somma è in obbligo di restituire a costui, oltre di questa somma, una retribuzione che valga a compensarlo del frutto che poteva la sua industria ricavare da quel denaro. Questa retribuzione si calcola sul frutto stabilito per ciascun anno sopra una data somma, per esempio, sopra 100 ducati; questo frutto dicesi *interesse*, e quello che dà l' intera somma, ovvero il *capitale* si chiama *rendita*. Adunque quattro cose sono da considerare nei problemi d' interesse: il *capitale*, l' *interesse*, la *rendita*, e il *tempo*; date tre di queste cose, la quarta rimane determinata. Noi tratteremo qui appresso dei vari problemi che ne risultano, i quali non sono che un' applicazione della regola del tre.

Supporremo da prima che si tratti di un sol anno; sicchè i problemi suddetti si ridurranno a *trovare una di queste tre cose: il capitale, l' interesse e la rendita, conoscendo le altre due.*

1.° *Dato il capitale e l' interesse, trovare la rendita.* Si vuol conoscere la rendita di un capitale di duc. 3728, *al 6 per 100.* Poichè 100 duc. ne dànno 6,200 ne daranno il doppio di 6,300 il triplo ec., cioè si avrà generalmente la proporzione 100 : 6 : : 3728 : x, la quale dà $x = 3728 \times \frac{6}{100} = 223,68$. Dunque la rendita è di duc. 223, 68. Osservando che il valore $3728 \times \frac{6}{100}$ è il prodotto del capitale per $\frac{6}{100}$, ovvero 0, 06, ciò pel rapporto di 6 duc. a 100 duc., che si chiama *ragione d' interesse*, si conchiuderà che *la rendita si ottiene moltiplicando il capitale per la ragione d' interesse.*

2.° *Dato il capitale e la rendita, trovare l' interesse.* Poichè

la rendita è il prodotto del capitale per la ragione d'interesse, quando sarà data la rendita, *per ottenere il capitale o la ragione d'interesse, si dividerà, la rendita per la ragione d'interesse o pel capitale.* Adunque se si domanda: al quanto per cento è stato impiegato un capitale di duc. 2500 che in un anno ha dato duc. 187, 5? si risponderà, facendo 187, 5 : 2500 = 0, 075; dunque il capitale è stato impiegato al $7\frac{1}{2}$ per cento.

3.° *Dato l'interesse e la rendita, trovare il capitale.* Si dividerà, come abbiam detto or ora, la rendita per la ragione d'interesse. Volendo sapere qual è il capitale che impiegato al $5\frac{1}{2}$ per 100, dà 316, 25 duc. dopo un anno, si farà 316, 25 : 0, 055 = 5750; onde il capitale è di duc. 5750.

Si può notare che quando il capitale è impiegato al 5 per 100, è 20 volte la rendita, perchè divider questa per $\frac{5}{100}$, ovvero per $\frac{1}{20}$ è l'istesso che moltiplicarla per 20. Dunque dopo 20 anni sarà uguale al capitale; e però questo si troverà raddoppiato.

Dopo ciò sarà facile trovare una di queste tre cose dopo un tempo qualunque, o il tempo, date queste tre.

4°. *Dato il capitale, l'interesse e il tempo trovare la rendita.* Abbiasi a determinare la rendita che dà dopo 17 mesi un capitale di duc. 3700 impiegato al 5 per 100. Se si conoscesse la rendita di un mese basterebbe moltiplicarla per 17 per avere la rendita cercata; ora la rendita di un mese si ottiene dividendo per 12 la rendita di un anno. Pel problema 1° la rendita di un anno è $3700 \times 0,05 = 185$; la dodicesima parte di questa è 15, 41; moltiplicando dunque per 17, si hanno duc. 261, 97 per la rendita di richiesta. Se si fosse domandata la rendita dopo un certo numero di anni, si sarebbe moltiplicata la rendita di un anno per questo numero. In generale si *ottiene la rendita dopo un certo numero di mesi, trovando prima la rendita di un anno, dividendola per 12, e poi moltiplicando pel dato numero di mesi la rendita di un mese così ottenuta. Per avere la rendita dopo un certo numero di anni si moltiplicherà la rendita di un anno pel dato numero di anni.*

Si potrebbe anche per maggiore semplicità operare *prendendo in parti*, come segue

per 12 mesi..................	duc. 185
per 4 mesi.....................	61, 66
per 1 mese.....................	15, 24
per 17 mesi....................	261, 90

5.° *Dato il capitale, la rendita e il tempo trovare l'interesse*. La regola è questa: *si divida la rendita pel dato numero di mesi o di anni, e si avrà così nel primo caso la rendita di un mese, nel secondo quella di un anno; si moltiplichi nel primo caso per 12 la rendita di un mese e si avrà la rendita di un anno; indi nel primo e nel secondo caso, avendo la rendita di un anno e il capitale, si determinerà l'interesse col problema* 2°. Così, volendo sapere al quanto per cento è stato impiegato un capitale di duc. 3570 che dopo 19 mesi ha dato duc. 160, 65, si dividerà per 19 la rendita data, e si avrà 160, 65 : 19 = 17, 85; indi si moltiplicherà per 12 questa rendita di un mese e si avrà per la rendita di un anno 17, 85×12=214, 2, finalmente colla rendita 214, 2 e col capitale 3570, si troverà l'interesse, come nel problema 2°, facendo 214, 2 : 3570=0, 06; donde si vede che il capitale è stato impiegato al 6 per 100.

6.° *Dato l'interesse, la rendita e il tempo, trovare il capitale*. Il problema sarà risoluto, trovata che sarà la rendita di un anno; onde si avrà la regola: *si divida la rendita pel dato numero di mesi o di anni; si moltiplichi nel primo caso la rendita trovata di un mese per 12 e si avrà quella di un anno; poi nell'un caso e nell'altro, avendo l'interesse e la rendita di un anno, si determinerà il capitale col problema* 4°. Volendo sapere qual è il capitale che impiegato al 6 per 100 ha dato 90 ducati dopo 4 mesi, si dividerà 90 per 4 e si avrà 22, 5 per la rendita di 1 mese; si moltiplicherà questa per 12, e si avrà 270 per la rendita di un anno; in ultimo, conoscendo la rendita di un anno 270 e la ragione d'interesse 0, 06 si otterrà, pel problema 3°, il capitale, facendo 270 : 0, 06=4500.

7.° *Dato l'interesse, la rendita e il capitale, trovare il tem-*

po. Si domanda, per esempio, quanto tempo si è tenuto impiegato un capitale di duc. 408 che al 5 per 100 ha fruttato duc. 8, 5. È chiaro che *la rendita di un anno sta alla rendita di un tempo qualunque come un anno sta a quel tempo*. Dunque, trovata la rendita di 1 anno, ch' è $408 \times 0,05, = 20,4$, si farà la proporzione $20,4 : 8,5 :: 12^{\text{mesi}} : x$, e quindi $x = \frac{12 \times 8,5}{20,4} = 5$; dunque il capitale si è tenuto impiegato per 5 mesi.

In tutti questi ultimi problemi, nei quali il tempo è diverso da un anno, si è supposto che non si tenesse conto dei giorni, come si fa comunemente, in ispezialtà per le piccole somme, cioè che non si trattasse se non di anni o di mesi, ma se si volesse tener conto di giorni, sarebbe facilissimo di operare per questi come s' è fatto pei mesi.

Regola di sconto.

296. Per trovare a che valore ascende un capitale dato ad interesse dopo un tempo qualunque, bisogna aggiungere a questo capitale gl' interessi corrispondenti a quel tempo, i quali si possono calcolare come nel problema 4° del n.° precedente. Ma sarà lo stesso, com' è chiaro, di trovare la ragione d' interesse corrispondente, a quel tempo e di moltiplicare, come si è fatto per un anno, il capitale per la ragione d' interesse. Così, volendo sapere il frutto di duc. 450 per 4 mesi, al 6 per 100 l'anno, si osserverà che la ragione d' interesse per 4 mesi è $\frac{1}{3}$ di 0, 06, cioè 0, 02, onde si avrà $450 \times 0,02 = 9$ pel frutto richiesto. Il capitale dunque dopo 4 mesi ascenderà a $450 + 450 \times 0,02 = 459$; il primo membro di questa uguaglianza è lo stesso che $450 \times 1,02$; dunque *per trovare il valore a cui ascende un capitale di cui sia data la ragione d' interesse annuale, si moltiplichi il capitale per l' unità accresciuta della ragione d' interesse corrispondente al dato tempo.*

297. Il problema inverso è: *dato il valore di un capitale dopo un tempo determinato e la ragione d'interesse annuale, trovare il capitale primitivo.* Ora poichè il valore proposto è il prodotto del capitale primitivo moltiplicato per l' unità accresciuta della ragio-

ne d' interesse corrispondente al dato tempo, *per ottenere il capitale primitivo, bisognerà dividere il valore proposto per l'unità accresciuta della ragione d'interesse corrispondente al tempo determinato*. Per esempio, se si domanda qual è la somma che impiegata al 6 per 100 l'anno ascende dopo 4 mesi a duc. 2499, questa sarà $\frac{2499}{1,02} = 2450$.

298. A questi due problemi riducesi la *regola di sconto*. Si dicono *cambiali* o *boni* quelle carte usate in commercio, nelle quali un negoziante promette di pagare una certa somma alla fine di un tempo determinato; di maniera che il possessore di quella carta, presentandosi al tempo della *scadenza* al negoziante, riceve quella somma. Ma volendo prontamente del danaro prima della scadenza, il che si usa spessissimo, lo si può riscuotere o dallo stesso negoziante o da un altro, rilasciandogli per guadagno una parte del *valor nominale* della cambiale; questo guadagno è quello che dicesi *sconto*; e si suol determinare come segue.

1.° Quando il negoziante riceve la cambiale, dovendola riscuotere dopo un certo tempo, si può considerare il suo valore come quello a cui ascende dopo quel tempo la somma ch'egli paga presentemente, data ad un certo interesse. Dunque si tratta di determinare il capitale primitivo, cioè la somma che il negoziante deve pagare al possessore della cambiale; questo si fa col problema del n.° precedente. Così, se un particolare si presenta a un negoziante per esigere una cambiale di duc. 3961, abbisognandoci 17 mesi per la scadenza, convenendo l'interesse al 5 per 100 l'anno, si troverà la ragione d' interesse corrisponde a 17 mesi, ch'è 0, 061, e si farà $\frac{3961}{1,061} = 3733,04$. Questa maniera di sconto si dice *al di dentro*, ed è giustissima, perchè il negoziante vi fa il guadagno che gli verrebbe dal dare ad imprestito per quel tempo la somma che paga al possessore della cambiale.

2.° Nello sconto *all' infuori* il negoziante fa un guadagno maggiore perchè gl' interessi si calcolano su tutto il valor nominale della cambiale. Così nell'esempio proposto lo sconto *all' infuori* è $3961 \times 0,061 = 241,62$, dunque il negoziante dee pagare $3961 - 241,62 = 3719,38$, mentre collo sconto *al di dentro* ne pagava 3733,04.

4.° Potrebbesi anche *determinare la ragione d'interesse dato lo sconto, ovvero quello che paga il negoziante, e il valor nominale della cambiale.* Se si tratta dello sconto *al di dentro*, essendo il valore *attuale* uguale al nominale diviso per l'unità accresciuta della ragione d'interesse corrispondente al tempo determinato, *per ottenere la ragione d'interesse si dividerà il valor nominale pel valore attuale.* Trattandosi dello sconto all'infuori, *si dividerà questo pel numero dei giorni o dei mesi dati; si troverà l'interesse di un mese, e si dividerà questo pel valor nominale; il quoziente sarà la ragione d'interesse per un mese.*

In ultimo potrebbonsi prendere per ignoti il valor nominale e il tempo; ma il lettore può veder facilmente come i problemi che ne risultano si ricavano immediatamente da quelli trattati innanzi, e però li lasciamo per suo esercizio.

Interessi a moltiplico.

299. La rendita di un capitale si suol pagare a dati periodi di tempo; per esempio, ogni mese, ogni quattro mesi, ogni anno. Ora alcune volte, o per circostanze del debitore, o per contratto convenuto, gl'interessi di un dato periodo di tempo, invece di pagarsi si sogliono aggiungere al capitale, per contare poi gl'interessi nei seguenti periodi sul capitale insieme con gl'interessi *arretrati.* Una somma impiegata a tal condizione si dice posta *a moltiplico.*

1.° Siasi posta a moltiplico la somma di duc. 3780 al 6 per 100 l'anno; si domanda a che valore ella ascenderà dopo 4 anni. Il capitale sul quale si debbono calcolare gl'interessi dopo il secondo anno è $3780\times1,06$, cioè il capitale primitivo più l'interesse del primo anno. Parimente il capitale dopo il secondo anno sarà $3780\times1,06\times1,06$, e dopo il terzo anno

$$3780\times1,06\times1,06\times1,06=4090,04.$$

Dunque la somma 3780 duc. posti a moltiplico al 6 per 100 l'anno, dopo 4 anni ascenderà a duc. 4090, 04. Se da questo va-

lore si toglie la somma primitiva, il resto 310, 04 sarà *l'interesse a moltiplico* o *composto* della somma data.

Supponiamo ora che i pagamenti non siansi convenuti per ogni anno, ma per ogni sei mesi; se 0, 06 è la ragione d'interesse per 1 anno, per 6 mesi sarà 0, 03; e siccome 4 anni si compongono di 8 periodi di 6 mesi, così, dopo quattro anni la somma posta a moltiplico ascenderà a

$$3780\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03\times1{,}03$$

Da ciò si può vedere che *quanto minori siano i periodi di tempo stabiliti pei pagamenti tanto maggiore diverrà il capitale*. Anche si vede che una somma posta a moltiplico al 5 per 100 l'anno, ad interessi annuali, si trova raddoppiata in poco più di 14 anni, mentre cogl'interessi semplici ci vorrebbero, come si è veduto nel problema 3° del n. 295, 20 anni.

Dai valori trovati si ricava la regola seguente: *per trovare il valore a cui ascende una somma data a moltiplico per un certo tempo, si moltiplichi il capitale proposto per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse corrispondente al periodo stabilito per la cumulazione degl'interessi, e si ripeta la moltiplicazione tante volte quanto è il numero dei periodi contenuti nel dato tempo*.

2° Abbiasi la quistione seguente: *che somma si dee impiegare a moltiplico, con l'interesse al 6 per 100 l'anno da aggiungersi al capitale in ogni nove mesi, per avere dopo tre anni duc. 3800?* La ragione d'interesse per 9 mesi sarà $0,\ 06\times\frac{3}{4}=0,\ 045$, e siccome tre anni contengono quattro periodi di 9 mesi, così, dinotando con x la somma da dare a moltiplico, il suo valore alla fine del terzo anno sarà, secondo che si è stabilito innanzi,

$$x\times1{,}045\times1{,}045\times1{,}045\times1{,}045=3800;$$

la quale uguaglianza dà

$$x=\frac{3800}{1{,}045\times1{,}045\times1{,}045\times1{,}045}$$

300. Questo problema è l'inverso del precedente, perchè in

quello data la somma si cercava il valore a cui ascendeva; qui dato questo valore, si cerca la somma. La regola, come si vede, è appunto inversa di quella stabilita innanzi, perchè *bisogna dividere il valore dato per la ragione dell' interesse corrispondente al periodo stabilito, e ripetere la divisione tante volte quanti periodi contiene il tempo dato.*

Interessi a scalare.

301. Qualora siasi dato ad imprestito con interesse un capitale, si suole alcuna volta, per agevolare la restituzione, convenire di farlo in *rate* di determinata quantità e *scadenza*. Gl' interessi, dopo pagata ciascuna rata, vanno di mano in mano decrescendo, e però prendono il nome d' interessi *a scalare*. Per esempio, un capitale di duc. 1200 siasi impiegato al 5 per 100 col patto di doversi restituire a rate annuali di duc. 300 l'una; è chiaro che dopo 4 anni il capitale sarà restituito intieramente. Alla fine del primo anno il debitore pagherà duc. 300, più l'interesse corrispondente all' intero capitale; alla fine del secondo anno, pagherà altri duc. 300 più l' interesse corrispondente al capitale, diminuito della prima rata, cioè a duc. 900; e così di seguito. Questi calcoli, come si vede, non presentano niuna dificoltà perchè rientrano nei casi generali dei problemi d' interesse trattati innanzi.

Evvi anche una seconda maniera d'interessi a scalare, la quale consiste nel comprendere nella rata stabilita anche gl' interessi. Per esempio, si conviene che i 300 ducati di rata annuale si debbono pagare soli, in modo che una parte sia per gl' interessi e l'altra per la diminuzione del capitale. Questa seconda parte, e però anche il tempo dell' *estinzione* del capitale, dipendono, com' è chiaro, dalla ragione dell' interesse, ed è troppo palese il modo di calcolarli per non esser mestieri che vi c' intrattenessimo davvantaggio.

Della rendita consolidata.

302. La *rendita consolidata* o *iscritta* è quella che un governo paga a rate semestrali, per debito che per circostanze dello stato

abbia contratto con particolari. Questa rendita si può cedere dai particolari a novelli possessori, i cui nomi vengono dal governo registrati nel suo *gran libro;* e il governo stesso suole annualmente comprarne una certa parte, a fine di *ammortizzare* il suo debito. Diminuendo così ella di anno in anno, ne aumenta il prezzo, e se nuovi bisogni dello stato o sospendessero l'*ammortizzazione* od obbligassero il governo ad aumentare il suo debito, il prezzo aumenterebbe. Anco sogliono molto influire sulla variazione del prezzo le vicende politiche, le quali possono offrire maggiore o minore sicurezza del pagamento della rendita.

Tre sono i problemi principali che hanno luogo nella rendita consolidata, e noi li esporremo qui appresso.

1.° *Si domanda qual somma bisogna sborsare per acquistare 387 ducati di rendita iscritta, essendo duc.* $92\frac{3}{4}$ *il prezzo di duc. 5 di rendita annuale.* È chiaro che il problema è risoluto dalla proporzione

$$5 : 92,75 :: 387 : x = \frac{387 \times 92,75}{5} = 7178,85.$$

Ma è più semplice di trovare il costo di 1 duc. di rendita, prendendo la quinta parte di 92, 75, ovvero raddoppiando la sua decima parte, e moltiplicando questo costo per la rendita che si vuol comprare. Ecco il calcolo per l'esempio proposto

```
   9, 275
        2
  18, 550
      387
   12985
  14840
  5565
  7178, 85
```

O anche si può moltiplicare la decima parte del prezzo pel doppio dalla rendita da acquistarsi.

L' uguaglianza $x = 92, 75 \times \frac{387}{5}$ trovata colla proporzione di sopra esprime che la somma da sborsarsi è il prodotto del prezzo di 5 duc. pel quinto della rendita da acquistarsi; dunque crescendo o diminuendo di una o più unità il moltiplicando 92, 75 il prodotto aumenterà o diminuirà di una o più volte il quinto della rendita, cioè *per ogni punto di aumento o di diminuzione del prezzo di 5 ducati, il costo totale della rendita aumenta o diminuisce del quinto di essa.*

Dalla medesima uguaglianza risulta che, *per ottenere il prezzo a cui ascende una data quantità di rendita, si dee dividere la somma sborsata pel quinto della rendita; o, che torna lo stesso, dividere il decuplo della somma pel doppio della rendita.*

2.° *Determinare quanta rendita iscritta si può comprare con duc. 7178, 85 al prezzo di 92$\frac{3}{4}$.* L' ignota è il quarto termine della proporzione 92, 75 : 7178, 85 :: 5 : x = 387. Ma si può trovare, come sopra, il costo di 1 ducato di rendita e dividere per esso la somma sborsata.

3.° *A che ragione s' impiegherà il danaro comprandone rendita al prezzo di 92 $\frac{3}{4}$.* S' intavolerà la proporzione

$$92, 75 : 100 :: 5 : x = \frac{500}{92, 75} = 5\tfrac{2}{5} \text{ circa};$$

dunque s'impiegherà al 6 $\frac{2}{5}$ per 100 circa.

Regola di società.

303. *Tre soci han posto in commercio duc. 1770, cioè uno duc. 800, un altro 620 e il terzo 350; questa somma ha dato un frutto di duc. 570 da dividersi ai tre soci; si domanda la parte che ne dovrà avere ciascuno.* Se uno di essi avesse un capitale metà, terza parte, ec. del totale 1770 gli spetterebbe naturalmente la metà, terza parte, ec. del guadagno totale 570; in generale, *il capitale totale sta a un capitale particolare come il guadagno totale sta al guadagno corrispondente a questo capitale particolare;* sicchè il problema sarà sciolto dalle proporzioni

$$1770 : 800 :: 570 : x = 800 \times \frac{570}{1770} = 257,62$$

$$1770 : 620 :: 570 : y = 628 \times \frac{570}{1770} = 199,60$$

$$1770 : 350 :: 570 : z = 350 \times \frac{570}{1770} = 112,71$$

L'operazione insomma si è ridotta a dividere il numero 570 nelle tre parti x, y, z proporzionali ai tre numeri dati 800, 600 e 350.

L'ispezione dei valori di x, y, z mostra chiaramente che *per ottenere il guadagno corrispondente a ciascun capitale, bisogna moltiplicare questo capitale per* $\frac{570}{1770}$, *ovvero 0,322033, cioè pel rapporto del guadagno totale al capitale totale.* Questa quantità costante 0,322033 si chiama *modulo*, e si dee prendere con tanto maggior numero di cifre decimali quanto più alti sono i capitali.

Se l'operazione è stata ben fatta conviene che i tre guadagni particolari sommati insieme diano il guadagno totale, e questa è la ripruova dell'operazione. Nel nostro esempio si trova infatti $257,62+199,60+112,71=569,93$, il qual valore differisce da 570 di 0,07, cioè di 7 grana.

Per rendere più semplice il calcolo, nelle grandi *società*, ove i capitali sono molti, si suol prendere per unità non un ducato, ma un numero *rotondo*, per esempio, 50, 100, 300, 1000, ec.; questa nuova unità chiamasi *azione*. Così il modulo si può prendere con minor numero di cifre decimali, perchè il numero che esprime quante azioni possiede un socio, è molto minore del numero di ducati a cui ascende quella somma; così, essendo 300 duc. l'azione, 7 azioni corrisponderanno a duc. 2100.

304. Nel problema precedente si è supposto che i soci tenessero i loro capitali in commercio per un ugual tempo; ma potrebbe avvenire il contrario, e allora si ha un nuovo elemento di cui si dee tener conto nella quistione. Ecco un esempio: *Quattro soci han posto insieme in commercio duc. 1770, cioè uno 820 che ha ritirati dopo 4 mesi, un altro 500 che ha tenuti per 1 anno, un al-*

tro 500 che ha ripresi dopo 9 mesi, e l' ultimo 80 per 17 mesi; il frutto totale è 630 e si domanda che parte ne dovrà ricevere ciascuno.

Al primo socio che ha tenuto in commercio duc. 820 per 4 mesi, lo stesso lucro sarebbe venuto tenendo un capitale 12 volte maggiore per un sol mese, ec.; dunque la quistione si è ridotta a *dividere il frutto totale* 630 in ragione dei capitali 820×4, 300×12, 500×9, 80×17; il che si fa come nel n.° precedente.

305. Molti problemi si riducono, come la regola di società, a dividere un numero proporzionalmente ad altri numeri dati, e però si risolvono collo stesso metodo. Eccone un esempio: *Posto a sacco un villaggio, il bottino è asceso a duc. 20300, e si dee dividere all'esercito in modo che gli uffiziali superiori dal capitano in poi abbiano il doppio dei bassi uffiziali; questi dai sergenti in poi il triplo dei caporali; e i caporali i $\frac{3}{2}$ dei soldati; intanto i soldati sono 8000, i caporali 589, i bassi uffiziali 144 e gli uffiziali superiori 97; si domanda quanto dee avere ciascuno.*

Noi lasciamo per esercizio del lettore d' interpretare bene questo problema, e di tener conto sì delle proporzioni delle parti dovute a ciascun grado, e sì del numero degl' individui in ciascuno di essi, analogamente alla regola di società quando si sono considerate le proporzioni dei capitali e il vario numero dei mesi.

Regola congiunta.

306. Questa regola sostituisce le regole del tre dirette congiunte con tal relazione fra loro che conducono a un rapporto composto.

Se 76 metri valgono 39 tese, qnante tese formano metri 14. Si avrà la proporzione

$$76:39::14:x=\frac{39\times14}{76}=7 \text{ tes. } 1 \text{ pied. } 1 \text{ pol. } 3\tfrac{1}{19} \text{ lin.}$$

Si ponno anche stabilire le due uguaglianze

$$39 \text{ tese} = 76 \text{ metri},$$
$$14 \text{ metri} = x \text{ tese};$$

moltiplicando la prima per 14 e la seconda per 76 risulta

$$39 \times 14 \text{ tese} = 76 \times 14 \text{ metri},$$
$$14 \times 76 \text{ metri} = x \times 76 \text{ tese};$$

dunque $39 \times 14 = x \times 76$, e quindi $x = \frac{39 \times 14}{76}$,

il qual valore è identico a quello trovato colla proporzione. Si noti che nelle due uguaglianze si trova il primo membro dell'una della specie del secondo dell'altra, e viceversa.

Si sa che 59 tese francesi sono equivalenti a 115 metri, e che 76 tese francesi equivalgono ad 81 tesa inglese; si domanda quanti metri formano 76 tese inglesi. Si dispongano le uguaglianze come prima, mettendo x per termine iniziale

$$x \text{ metri} = 36 \text{ tese inglesi},$$
$$81 \text{ tesa inglese} = 76 \text{ tese francesi},$$
$$59 \text{ tese francesi} = 115 \text{ metri}.$$

Le due prime possono essere sostituite dal loro prodotto, come si è veduto innanzi; il primo membro sarà della specie del termine iniziale e il secondo di quella dell' ultima; onde si avrà

$$x \times 81 \text{ metri} = 36 \times 76 \text{ tese francesi}$$
$$59 \text{ tese francesi} = 115 \text{ metri},$$

e moltiplicando membro per membro queste due, sarà

$$x \times 81 \times 59 \text{ metri} = 36 \times 76 \times 115 \text{ metri},$$

e quindi $x = \frac{36 \times 76 \times 115}{81 \times 59} = 66$ metri circa.

Questo valore non è altro che il prodotto dei secondi membri delle uguaglianze poste di sopra diviso pel prodotto dei primi membri, eccetto il termine iniziale. Siccome da due equazioni si è passato a tre, così da tre si passerà a quattro, da quattro a cinque, ec.; onde si avrà generalmente la regola seguente: *si scrivano le uguaglianze in modo che il secondo membro di ciascuna sia dello stesso genere che il primo di quella che la segue; si ponga per termine iniziale l'ignota, e l'ultimo termine sarà dello stesso genere; indi si divida il prodotto dei secondi membri pel prodotto dei primi eccetto l'ignota, a cui sarà uguale il quoziente.*

307. La regola congiunta prende il nome di *regola di cambio* quando si applica al paragone delle somme espresse in monete di paesi diversi.

Abbiasi, per esempio, la quistione seguente: *Si domanda a quanti rixdalers di Colonia equivalgono 1000 franchi, sapendo che 80 franchi = 81 lire tornesi, 500 lire tornesi = 76 rixdalers di Francfort, 100 rixdalers di Francfort = 99,5 di Colonia, 1 rixdaler di Francfort = 90 kreutzers, 138 kreutzers = 115 stuvers, 60 stuvers = 1 rixdaler di Colonia.* Si porranno le uguaglianze

x rixdalers di Colonia	=	1000 franchi.
80 franchi	=	81 lire tornesi.
300 lire tornesi	=	76 rixdalers di Francfort.
100 rixdalers di Francfort	=	99, 5 di Colonia.
1 rixdaler di Francfort	=	90 kreutzers.
138 kreutzers	=	115 stuvers.
60 stuvers	=	1 rixdaler di Colonia.

e si farà $x = \dfrac{1000 \times 81 \times 76 \times 99,5 \times 90 \times 115 \times 1}{80 \times 300 \times 100 \times 1 \times 138 \times 60}$;

eseguendo i calcoli si trova $x = 319$ rixdalers, $1\frac{1}{3}$ stuvers.

308. Conoscendo il rapporto fra due unità diverse ma omogenee, sarà facile di esprimere una quantità in una di esse quando sia già espressa nell'altra. Eccone alcuni esempi:

Si domanda a quanti metri equivalgono 57 tes. 5 pied. 8 pol. Nella tavola I in fine dell'aritmetica si vede che 1 tesa $= 1^{m.}949$; si ha dunque la proporzione $1^{t.} : 1^{m.},949 :: 57^{t.}\ 5^{p.}\ 8^{p.} : x = 112^{m.}$, 9337.

Per facilitare le moltiplicazioni è utilissimo di ridurre in decimali i numeri complessi.

309. *Si domanda il rapporto del litro alla pinta, conoscendo le seguenti relazioni:*

x pinte	= 1 litro
1 litro	= 1000 centimetri cubi
19, 8364 cent. cub.	= 1 pollice cubo
46, 93 pol. cub.	= 1 pinta.

Si dovrà applicare la regola congiunta e si avrà

$$x = \frac{1 \times 1000 \times 1 \times 1}{1 \times 19{,}8364 \times 46{,}93} = 1{,}073747 \text{ pinte.}$$

Regola di alligazione.

310. Questa regola serve a far trovare il valor medio tra quelli di varie altre quantità di specie differenti, mescolate insieme. Eccone un esempio: *Si vogliono mescolare tre sorte di vini di differenti specie, cioè 35 barili a 14 carlini il barile; 12 barili a 16 carlini, e 4 barili a 25 carlini; si domanda quale dovrà essere il costo di un barile della mescolanza.* Il costo dei 35 barili della prima specie è carlini 14×35, cioè ducati 49; il costo dei 12 barili della seconda specie è carlini 12×16, ovvero ducati 18, 8; il costo dei 4 barili della seconda specie è carlini 25×4, cioè ducati 10; dunque il costo totale della mescolanza è ducati $49 + 18, 8 + 10$, cioè ducati 77, 8; questa mescolanza si compone di barili $35 + 12 + 4 = 51$; dunque diviso 77,8 per 51, si ha $\frac{77{,}8}{51} =$ ducati 1,52. Si avrà dunque la regola seguente: *si moltiplichi l' unità di ciascuna specie pel numero ch' esprime quante si prendono di queste unità; si hanno così tanti prodotti quante specie differenti vi sono. Si divida la somma di questi prodotti per quella delle unità delle varie specie, e il quoziente sarà il valore di una unità della mescolanza.*

311. Questa regola è detta di alligazione dacchè si applica alla

lega di vari metalli in un solo. Nell'oro e nell'argento si suol sempre mescolare una piccola quantità di metallo più vile, come il rame, a fine di dar loro maggiore consistenza; il *titolo* è il rapporto del peso di metallo fino contenuto nella mescolanza a quello di tutta questa mescolanza; se per esempio, il peso del rame mescolato è $\frac{1}{100}$, il titolo sarà $\frac{99}{100}$. Se si domandasse: *si vuol conoscere il titolo di lega di 12 rotoli di argento al titolo di 0,927; più 2 rotoli al titolo 0,801, più 27 rotoli al titolo di 0,857*, bisognerebbe applicare la regola di alligazione, come prima, il che non presenta niuna difficoltà.

Regola di falsa posizione.

312. Daremo qui in ultimo una regola pratica utilissima mediante la quale si ponno risolvere tutte le quistioni numeriche ad una sola incognita che rientrano nella specie di quelle risolute dall'algebra con una equazione di primo grado. La dimostrazione di questa regola trascende i mezzi dell'aritmetica.

Ella consiste nel *prendere per l'ignota un numero arbitrario* (il che costituisce appunto la *falsa posizione*); *calcolare l'errore che ne viene nel soddisfare alla condizione del problema; poi prendere similmente un secondo valore arbitrario per l'ignota e calcolare il secondo errore e in ultimo operare colla regola seguente :*

1.° *Se gli errori siano della stessa natura, cioè o entrambi in più, o entrambi in meno, si moltiplichi la prima supposizione per l'errore della seconda, e la seconda per l'errore della prima, e si divida la differenza di questi prodotti per la differenza degli errori.*
2.° *Se gli errori siano uno in più, l'altro in meno, si divida la somma dei due prodotti anzidetti per la somma degli errori.*

Nell'uno e nell'altro caso il quoziente sarà il valore dell'ignota.

Esempio I. *Trovare due numeri la cui differenza sia 7 e la somma 33.*

Qui l'ignota è una sola, perchè, conosciuto che sarà il minore dei due numeri che si cercano, l'altro si otterrà aggiungendo a questo la differenza 7. Ora supponiamo che sia 15 il minore,

l'altro sarà 15+7, cioè 22; la seconda condizione del problema si è che la somma dei due numeri dev' essere 33; ma 15+22=37, che supera 33 di 4, dunque il primo errore è 4 in *più*. In secondo luogo supponiamo che sia 12 il minore dei due numeri, 12+7, cioè 19 sarà l'altro; 12+19 fa 31 che manca da 33 di 2; dunque si avrà

1ª supposizione = 15, 1° errore = 4 in *più*
2ª supposizione = 12, 2° errore = 2 in *meno*.

Il prodotto della 1ª supposizione pel 2° errore è 30; il prodotto della 2ª supposizione pel 1° errore è 48; essendo gli errori uno in più, l'altro in meno, si dee dividere la somma di questi due prodotti per la somma degli errori; onde si avrà $\frac{30+48}{4+2}=\frac{78}{6}$ = 13 pel numero minore; quindi il maggiore sarà 13+7, cioè 20; infatti si trova 13+20=33, come si richiedeva.

Per ottenere la massima semplicità, essendo le supposizioni intieramente arbitrarie, si potrà prendere per una 0 e per l'altra 1; allora il primo prodotto sarà 0 il secondo sarà il primo errore, e così la regola sarà ridotta a *dividere il primo errore per la somma o la differenza degli errori, secondo che questi siano di natura differente o della stessa natura*. Così nell' esempio I si troverà

1ª supposizione = 0, 1° errore = 26 in *meno*
2ª supposizione = 1, 2° errore = 24 in *meno*

onde il numero minore sarà $\frac{26}{26-24}=\frac{26}{2}=13$, come prima.

Gli esempi infrascritti li risolverà il lettore per suo esercizio.

II. *Dividere il numero 75 in due parti tali che il triplo della maggiore superi il settuplo della minore di 15.* Risposta: le due parti sono 21 e 54.

III. A *guadagna da* B *10 carlini, e si trova così averne 6 più di lui; essi avevano insieme carlini 40; si domanda quanto aveva ciascuno.* Risposta: 13 carlini il primo, e però l'altro 40—13=27.

IV. *Si hanno due recipienti d'acqua eguali, e se dall'uno si tolgano 34 secchie, e dall'altra 80, nella prima resterà il doppio dell'acqua che nella seconda; quante secchie d'acqua conteneva ciascun recipiente?* Risposta: 126 secchie.

V. *Un figlio domanda a suo padre qual era l'età di ciascuno, e questi gli risponde: la tua età era quattr' anni fa la quarta parte della mia, ma ora n'è la terza parte; qual è l'età di ciascuno?* Risposta: 12 anni quella del figlio, e 36 anni quella del padre.

VI. *Trovare quel numero la cui terza parte ne superi la quarta parte di 16.* Risposta: questo numero è 192.

VII. *Trovare due numeri nella ragione di 9 a 7 tali che il quadrato della loro somma e il cubo della differenza siano uguali.* Risposta: questi sono 281 e 224.

VIII. *Dividere 100 in due parti tali che la differenza dei loro quadrati sia 1000.* Risposta: queste parti sono 55 e 45.

FINE.

NOTE

NOTA A — *Sull' idea del numero.*

Tutti gli sforzi dei matematici sono sempre riusciti vani a dare una esatta definizione del numero. Ne di ciò è a dolere; è anzi strano il contrario, cioè ch' essi vogliano dilucidare con altre idee un concetto così semplice com' è questo del numero. Dicono alcuni: *il numero è una collezione di unità*; ma *collezione* e *numero* non suona egli lo stesso? Che definizione è mai questa? Sono però alcuni altri che dànno la preferenza a quella del Newton, il quale dice: *Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quae pro unitate habetur rationem intelligimus* (Arithm. univ.). Ora io domando non si suppone egli già in questa definizione l' idea del numero? non si definisce il numero per il numero? Io sono in dritto di domandare: che s' intende per *rapporto* di una quantità ad un' altra? per quanti sforzi si facciano sarà egli mai possibile di non far entrare nella risposta l' idea del numero? Con ciò rimane giustificato intieramente il non dare che noi facciamo del numero niuna definizione *reale*. Ne diamo però una *nominale*; e ciò è sempre lecito, eziandio nelle idee semplici. Bisogna egli nelle Matematiche dimenticarsi della Logica?

Un altro manifesto errore si è quello di credere che nel concetto generale del numero si racchiuda pur quello che le parti ond' esso si compone debbano essere tutte uguali fra loro. Questo è un caso particolare di considerare il numero; è quello che ha luogo quando lo si concepisce come risultante dal paragone di una grandezza alla sua unità; ma l'idea generale del numero è quella di una pluralità quale che siasi, un insieme di parti qualunque che costituiscono un tutto. Così se una linea retta sia la somma di più rette disuguali, si dirà ch'ella è divisa in un *numero* di parti. Questa è la ragione per la quale noi nel testo, allontanandoci dal costume degli altri, abbiamo chiamato *numero* la quantità considerata come l' insieme di più parti distinte, senza includere che queste parti debbano essere tutte uguali fra loro; indi scendendo all' idea particolare, onde si studia nell' Algoritmia il numero, ne abbiamo svolta completamente la generazione, ed abbiam fatto così vedere, come le parti che lo costituiscono sono tutte uguali fra loro.

NOTA B — *Cenno sullo studio dei numeri.*

Le cose che ci presentano l' attributo di quantità si riducono in ultima analisi allo *spazio* e al *tempo*; onde bene il Wronski col filosofo di Conisberga de-

finisce le matematiche *le scienze delle leggi dello spazio e del tempo*; definizione che dà la più vera e sublime idea della scienza, e che mostra l'altissimo posto ch'ella occupa nella Filosofia, scienza sovrana e legislatrice di ogni altra. Infatti, coll'indagare le leggi dello spazio e del tempo le matematiche spingono il loro volo fino alla considerazione delle leggi cosmiche che regolano l'universo, e portano lo spirito umano all'altezza più sublime alla quale egli possa aspirare. Oltre di ciò, lo studio della quantità costituisce un ordine di verità astratte indipendente dalle cose in cui ella si considera, nelle quali l'intelletto trova una soddisfazione di gran lunga maggiore che in ogni altro obbietto, a cagione del niuno intoppo ch'esso incontra nello svolgimento dei raziocinii che menano speditamente di certezza in certezza e conducono perfettamente allo scopo.

Ora è da notare che il doppio aspetto sotto il quale ci si può presentare la quantità, cioè come continua o come discreta, ha fatto credere lungamente ai matematici che due ancora doveano essere i metodi di studiarla, cioè uno per le verità geometriche, un altro per le numeriche; questa cruda separazione è stata quella che ha inceppato fortemente gli antichi, e che rende ora così rozze e pesanti le loro dimostrazioni geometriche; oltre di che, tu cerchi invano in essi metodi e lumi generali per classificare quelle verità secondo le varie specie loro, e metterne in chiaro l'intima essenza. Ma oggi uno è il metodo matematico, uno è l'ordine supremo di verità sotto cui vanno raccolte tutte le possibili applicazioni, delle quali la Geometria è appunto una; questo è il metodo analitico, è lo studio dei numeri. Se la quantità ci si può presentare come continua, ciò non toglie che l'intima sua essenza sia il numero; sicchè quantità non importi che numero. Sia a una quantità qualunque; la sua natura è quella di poter crescere o diminuire; ora facendola crescere indefinitamente, io concepisco ch'essa passerà per gli stati $2a$, $3a$, $4a$, ec.; ed ecco, come stabilita a per unità si hanno i numeri interi 1, 2, 3, 4, ec. Si vede intanto che tra lo stato a e $2a$, fra $2a$ e $3a$, ec. ci hanno vari stati intermedi, i quali non possono essere espressi in numeri interi; ora, s'immagini che a diminuisca indefinitamente; si concepisce ch'ella passerà per gli stati $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, ec. onde, presa per unità ciascuna di queste infinite parti aliquote dell'unità, e ragionando come su di a, si avranno vari altri numeri ch'esprimeranno vari altri stati della quantità a che cresce e decresce, alcuni minori di a, alcuni maggiori e intermedi ai numeri interi; questi sono i numeri fratti. Adunque crescendo e decrescendo a indefinitamente, passerà per gl'infiniti stati espressi dai numeri interi e i fratti. Tra tutti questi infiniti stati ce ne hanno però infiniti altri che non contengono esattamente nè a nè qualunque sua parte aliquota esattamente; questi costituiscono le quantità incommensurabili con a; esse intanto, come si è veduto, si potranno esprimere in numeri con un'approssimazione quanto si voglia grande, e, cangiando l'unità, si potrebbero esprimere in numeri esattamente. Ecco dunque come nell'idea della quantità s'include natural-

mente quella del numero; onde lo studio della quantità si riduce a quella del numero; e nell'Algoritmia, che studia le proprietà generali dei numeri, sono compresi tutti i principii che si applicano particolarmente alle singole parti delle Matematiche; la Geometria, la Meccanica, l'Astronomia, ec. non sono che applicazioni dei principii generali dell'Algoritmia; ed ora tutte queste discipline non trovansi elevate a sì sublime altezza, se non per la felice idea di quest'unico metodo matematico.

In due modi si possono studiare i numeri, o dal lato della loro *costruzione*, o da quello del loro *paragone*. La loro *costruzione* o *generazione*, come abbiam detto nella nota a pag. 2, può essere *elementare* o *sistematica*; la generazione elementare costituisce le sei primitive operazioni del calcolo, contenute negli algoritmi $a+b=c$, $a\times b=c$, $a^b=c$, e nei loro inversi $c-b=a$, $\frac{c}{a}=b$, $\sqrt[b]{a}=c$ Tutti gli altri algoritmi che presentano modi di generazioni non così elementari, per esempio, l'algoritmo delle serie ch'è $Fx=A_0+A_1x+A_2x+A_3x+$ ec., costituiscono la generazione aistematica. Anche il paragone dei numeri è *elementare* o *sistematico*, l'elementare ci dà le *proporzioni* e le *progressioni*, il sistematico le *equazioni*. L'Eulero è stato il primo che fatto notare le relazioni che hanno fra loro i vari modi elementari della costruzione dei numeri, e la scienza del calcolo deve a questo sommo geometra i primi lumi di quel metodo veramente uno e scientifico col quale ella ora si studia. Egli mostra in un modo ingegnosissimo come ciascuno degli algoritmi elementari dia origine a nuove specie di numeri e pone tra le diverse parti dell'algebra un legame e una unità da non rendere questa scienza un complesso di verità staccate ed indipendenti, come prima di lui si faceva, quando l'Algebra lungi dal considerarsi come la parte suprema delle matematiche che contiene tutte le leggi astratte della quantità, era tenuta come un mezzo secondario per la soluzione dei problemi. Alle sue mire si può dare ora ampiezza maggiore e più diretta allo scopo; ma noi non faremo parola di ciò, trovandoci in luogo inopportuno, ed avendo in animo di svolgere le nostre idee in un trattato di Algebra cui speriamo dettare in appresso secondo veri principii filosofici.

NOTA C — *Numerazione scritta dei Greci e dei Latini.*

L'esposizione della maniera usata dai Greci e dai Latini per iscrivere i numeri renderà vie più manifesti gl'immensi vantaggi della nostra numerazione scritta.

I Greci rappresentavano le unità, le decine e le centinaia colle successive lettere dell' alfabeto, come si vede qui appresso.

$\alpha = 1$	$\iota = 10$	$\rho = 100$
$\beta = 2$	$\varkappa = 20$	$\sigma = 200$
$\gamma = 3$	$\lambda = 30$	$\tau = 300$
$\delta = 4$	$\mu = 40$	$\upsilon = 400$
$\varepsilon = 5$	$\nu = 50$	$\phi = 500$
ϛ $= 6$	$\xi = 60$	$\chi = 600$
$\zeta = 7$	$o = 70$	$\psi = 700$
$\eta = 8$	$\pi = 80$	$\omega = 800$
$\theta = 9$	ϟ $= 90$	$\Theta = 900$

Per esprimere le migliaia si poneva un accento (') sopra le lettere. Ecco alcuni esempi di numeri scritti, $\alpha\varepsilon\eta = 1+5+8 = 14$; $\beta'\phi\theta = 2000+500+9 = 2509$; $\varepsilon'\omega\pi\delta = 5000+800+80+4 = 5884$.

I caratteri principali usati dai Latini erano i seguenti:

I = 1	V = 5	C = 100
II = 2	X = 10	D o IↃ = 500
III = 3	L = 50	M o CIↃ = 1000.

Con questi si esprimevano tutti i numeri; quando uno di essi si trovava a destra di un altro maggiore vi dovea essere aggiunto, e sottratto quando trovavasi a sinistra, come si vede negli esempi seguenti.

VI=6	XVI=16	LX=60	CX=110	DC=600
IV=4	XIV=14	XL=40	XC=90	CD=400

Adunque il numero MCDXCIV equivale a 1494.

NOTA D — *Sulla moltiplicazione.*

Se poniamo ben mente al procedimento che seguesi nella moltiplicazione di due numeri composti, possiamo dedurne una regola per trovar subito il loro prodotto, senza scrivere tutti i prodotti parziali. Si vede in fatti dalla regola stabilita che i prodotti parziali sono scritti in modo gli uni sotto degli altri, che gli stessi ordini di unità si trovan tutti nella colonna medesima; di più che nella prima colonna a destra non vi è sempre che una sola cifra; questa rappresenta le unità del prodotto delle unità del moltiplicatore per le unità del moltiplicando; nella seconda vi son due cifre; la prima rappresenta le decine che dà la somma che risulta dall' aggiungere la ritenuta del primo prodotto al prodotto delle u-

nità del moltiplicatore per le decine del moltiplicando; la seconda cifra rappresenta le decine che dà il prodotto delle decine del moltiplicatore per le unità del moltiplicando; la terza colonna ha tre cifre, la prima è quella delle centinaia che dà la somma del prodotto delle unità del moltiplicatore per le centinaia del moltiplicando; più le seconde centinaie ritenute dal secondo prodotto; la seconda rappresenta le centinaia date dalla somma del prodotto delle decine del moltiplicatore per quelle del moltiplicando, più le centinaie ritenute dal prodotto antecedente; la terza è la cifra delle centinaia che dà il prodotto delle centinaia del moltiplicatore per le unità del moltiplicando; la quarta colonna ha quattro cifre e si vedrà con un modo analogo a quello tenuto finora che cosa rappresenta ciascuna di esse.

Ora è facilissimo di vedere come da questa osservazione risulta la regola seguente per trovare il prodotto di due numeri composti, senza che prima si facciano tutti i prodotti parziali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore: *Si faccia il prodotto delle unità del moltiplicatore per quelle del moltiplicando; e scritta la cifra delle unità si ritengano le decine se pur ve ne abbiano; indi si moltiplichino le unità del moltiplicatore per le decine del moltiplicando; e al prodotto si aggiungano le decine ritenute dal primo prodotto; si aggiunga poi mentalmente la somma così ottenuta al prodotto delle decine del moltiplicatore per le unità del moltiplicando; si scrivano le decine di questa somma e si ritengano le centinaia qualora ve ne siano; dopo ciò si moltiplichino le unità del moltiplicatore per le centinaia del moltiplicando; le decine del moltiplicatore per quelle del moltiplicando e le centinaia del moltiplicatore per le unità del moltiplicando; sommati mentalmente questi tre prodotti, vi si aggiungano le centinaia ritenute innanzi; e della somma che si ha si scrivano le centinaia e si ritengano, ove ce ne abbiano le migliaia; e così si continui per le altre colonne. Quando le cifre del moltiplicatore siano in minor numero che quelle del moltiplicando* (sovveniamoci della convenzione che abbiam fatta di prender sempre il numero minore per moltiplicatore), *allora si scrivano a sinistra del moltiplicatore tanti zeri finchè sia eguagliato ne' due fattori il numero delle cifre; è chiaro che così il moltiplicatore rimane lo stesso; fatto ciò, si applichi la regola qui stabilita.*

Operiamo con questo metodo sull'esempio che segue.

$$\begin{array}{r} 3255 \\ \underline{2974} \\ 9574422 \end{array}$$

Diremo $3\times4=12$, scriveremo 2 e riterremo 1; indi $4\times5=20$; $7\times5=21$, $20+21=41$ e a questa somma aggiunta la ritenuta 1 del primo prodotto, avremo 42, porremo 2 e riterremo 4; continueremo $4\times2=8$, $7\times5=35$, $9\times5=27$, $8+35+27=70$ più la ritenuta 4 fa 74; scriveremo 4 e riterremo 7; poi diremo: $4\times3=12$, $7\times2=14$, $9\times5=45$, $2\times3=6$, $12+14+45+6=77+$ la ritenuta $7=84$; porremo 4 e riterremo 8; ancora $7\times3=21$, $2\times5=10$, $2\times9=18$, $21+10+18=$

39+ la ritenuta 8=47, scriveremo 7 e riterremo 4; indi 3×9=27, 2×2=4, 27+4=31+ la ritenuta 4=35; scritto 5 la ritenuta è 3; finalmente 2×3=6+ la ritenuta 3=9, che si scrive al prodotto.

Esaminando il modo onde abbiamo operato, si vede in somma che noi, dal sapere che il prodotto cercato è la somma di tutti i prodotti di ciascuna cifra del moltiplicatore per ciascuna cifra del moltiplicando; e di più che scritti i prodotti parziali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore gli uni sotto degli altri, nella maniera che c' insegna la regola della moltiplicazione, le cifre che si trovano in una stessa colonna rappresentano le unità dei prodotti di un medesimo ordine di unità; abbiamo successivamente sommati quei prodotti che davano lo stesso ordine di unità; così nella prima colonna che dovea contenere unità si è avuta una sola cifra; perchè un sol prodotto potea dare unità; questo era quello delle unità del moltiplicatore per quelle del moltiplicando; nella seconda che dovea contenere decine, i prodotti doveano esser due; quello cioè delle unità del moltiplicatore per le decine del moltiplicando, e viceversa; nella terza che dovea contenere centinaia doveano esser tre i prodotti; quello cioè delle unità del moltiplicatore per le centinaia del moltiplicando, e viceversa, e quello delle decine del primo per le decine del secondo; e così seguitando si vede che nella quarta dovevano esser 4, nella quinta 3, nella sesta 2 e nella settima 1.

Prendiamo ora l' esempio seguente ove il moltiplicatore ha meno cifre che il moltiplicando; uguaglieremo, come abbiam detto, il numero delle cifre dei fattori, col porre un numero sufficiente di zeri a sinistra del moltiplicatore, il che nol fa cangiare.

$$\begin{array}{r} 5348 \\ 0025 \\ \hline 133700 \end{array}$$

diremo: 8×5=40; scritto lo zero, riterremo il 4; 5×4=20, 2×8=16, 20+16=36, più la ritenuta 4 fa 40; porremo lo zero al prodotto e riterremo il 4; 5×3=15, 0×8=0, 4×2=8, 15+8=23 a cui aggiunta la ritenuta 4, avremo 27; scritto il 7 riterremo il 2; 5×5=25, 0×8=0, 2×3=6, 0×4=0, 25+6=31 più la ritenuta 3=33; posto il 3 al prodotto, riterremo il 3; 2×5=10, 0×4=0, 0×3=0, 10+ la ritenuta 3=13, che si scrive tutto intero al prodotto.

Veramente qui non abbiamo messo per altro gli zeri a sinistra del moltiplicatore che per far vedere l' uniformità al modo di operare detto innanzi; ma compreso il procedimento, si può tralasciare di scriverli, e non si faranno quei prodotti che nascerebbero da una cifra del dividendo per quella che manca dello stesso ordine nel moltiplicatore.

Questa maniera di operare è certamente più difficile della generale indicata

nel n.° 67, a cagione delle addizioni che si debbono fare a memoria; addizioni che crescono col crescere del numero delle cifre del moltiplicatore; ed è però che noi non l' abbiamo proposta ai principianti; ma ella è tuttavia da preferirsi come assai più breve ed elegante da un calcolatore ben destro alle operazioni mentali.

Farò ancora osservare, che operando anche col metodo generale, potrebbero aver luogo alcune semplicizzazioni e abbreviazioni di calcolo in certi casi della moltiplicazione.

I. Quando il moltiplicare sia il prodotto di più numeri l' operazione sarà abbreviata moltiplicando successivamente il moltiplicando per quei fattori; è chiaro da ciò che si è dimostrato nel n.° 102 che così il prodotto rimane lo stesso. Così, debbasi moltiplicare 347 per 27, osservando che $27=3\times9$ si farà prima il prodotto di 347 per 3, poi questo prodotto si moltiplicherà per 9; come si vede qui sotto.

$$\begin{array}{r} 347 \\ 3 \\ \hline 1041 \\ 9 \\ \hline 9369 \end{array}$$

in questo modo l' operazione è stata abbreviata, perocchè se si fosse operato nel modo generale prendendo 27 per moltiplicatore; oltre dei due prodotti del moltiplicando per 7 e per 2, si sarebbe dovuto fare anche l' addizione di questi due prodotti; le operazioni dunque sarebbero state tre; mentre nel modo da noi qui indicato sono state due.

II. Se il moltiplicatore sia una parte aliquota di un numero decimale, o, ch' è lo stesso, di una potenza di 10; l'operazione sarà semplicizzata mettendo a destra del moltiplicando tanti zeri quanti ne ha questa potenza, e dividendo poi il numero che si ha per quello che indica quante volte il moltiplicatore è contenuto nella potenza di 10. Così se abbiasi a moltiplicare 348 per 25; le operazioni dovrebbero essere tre; ma osservando che 25 è la quarta parte di 100, si metteranno due zeri a destra del moltiplicando 348, e si avrà 34800; indi si dividerà questo numero per 4; il quoziente 8700 è il prodotto cercato.

Per un altro esempio sia da moltiplicarsi 3425 per 125; si osserverà che 125 è la quarta parte di 1000 quindi $3425\times125=3425000:4=856250$.

III. Allorchè le cifre del moltiplicatore siano tutti 9 si abbrevierebbe di molto l' operazione scrivendo tanti zeri a destra del moltiplicando, quante sono le cifre del moltiplicatore e togliendo poi dal numero che così si ottiene, il moltiplicando medesimo. Così $347\times999=347000-347=346653$. Infatti essendo $999=1000-1$, sarà $347\times999=347\times(1000-1)=347000-347$.

L' operazione potrebbe anche semplicizzarsi, benchè meno, in un modo analo-

go, nel caso che le cifre del moltiplicatore fossero tutte 9, ad eccezione dell'ultima o delle due ultime; allora si scriveranno, come prima, quante son le cifre del moltiplicatore; e se ne sottrarrà il prodotto del moltiplicando per quel numero che bisognerebbe aggiungere al moltiplicatore per avere la potenza di 10 prossimamente maggiore. Così per moltiplicare 4278 per 99975, si osserverà che $99975=100000-25$; dunque $4278\times99975=4278\times(100000-25)=427800000-25\times3278$.

Si vede che nello stesso modo si potrebbe operare, quando non la sola ultima cifra, o le due sole ultime, ma le tre, le quattro ultime ec. sieno differenti da 9; ma noi abbiamo indicato solamente quei due casi, primamente perchè quando le ultime cifre siano più di due è più difficile di vedere qual è il numero che aggiunto al moltiplicatore dia la potenza di 10 prossimamente maggiore; secondamente perchè conosciuto questo numero, esso ha più di due cifre; epperò la moltiplicazione di esso pel moltiplicando per avere il sottrattore, è più lunga; perciò la semplicizzazione darebbe tante più linee, che non importerebbe gran fatto di sostituirla al procedimento generale.

IV. In ultimo non tacerò di un caso di frequente occorrenza, nel quale l'operazione potrebbe essere assai più spedita e facile. Questo è quando, dopo fatto un prodotto parziale del moltiplicando per una cifra del moltiplicatore, passando al prodotto parziale seguente, si trovi una cifra o due, ch' esprimono un multiplo della cifra antecedente; allora si moltiplicherà il prodotto parziale avuto prima per il numero che indica che multiplo è quella cifra o quelle due, della precedente. Ecco un esempio:

	34783
	54279
prod. per 9............	313047
prod. del prec. per 3....	939141
prod. del prec. per 2..	1878282
prodotto totale	197532657

Si fa prima il prodotto del moltiplicando per 9; passando poi agli altri prodotti parziali, si vede che le cifre seguenti del moltiplicatore dànno 27, ch'è triplo di 9; ora moltiplicare per 27 vale lo stesso che moltiplicare per 9 e poi il prodotto per 3; dunque noi moltiplicheremo per 3 il prodotto trovato, ch' è appunto quello per 9; ed avremo così il prodotto per 27 che scriveremo sotto di quello avuto prima, in modo però che la prima cifra a destra sia nella colonna delle decine. Dopo ciò troviamo 54 per le altre due cifre del moltiplicatore, e siccome $54=27\times2$, così moltiplicheremo il prodotto parziale antecedente per 2; avremo in tal modo il prodotto per 54; e lo scriveremo sotto del precedente, ponendo nella colonna delle centinaia la prima cifra a destra. In ultimo sommati i tre prodotti parziali, otterremo il prodotto cercato.

Abbiamo ristretto il caso a uoa o a due cifre, perchè noi non sappiamo a memoria, se non appnnto i prodotti di una o due cifre.

Avvertiremo eziandio che quaodo si ha una cifra multipla dell' antecedente non si avrà per l'altro fattore che un numero semplice; come pure quando avremo due cifre che dàono un multiplo del numero espresso dalle doe cifre antecedenti; ciò si dedoce immediatameote da quello che si è detto nel n.° 72 circa il numero delle cifre che può avere nn prodotto di due fattori. Ma quando le cifre son due e l'antecedente una, allora l'altro fattore potrebbe avere due cifre; e allora la semplicizzazione non sarebbe di tanto momeoto, perchè doveodo moltiplicare il prodotto avuto innanzi per un numero di due cifre, l'operazioni sarebbero anche due; la sola semplicizzazione consisterebbe nell' avere per moltiplicatori doe cifre più piccole di quelle che sono nel moltiplicatore dato.

Se i multipli fossero a destra de' loro fattori, per avere la semplicizzazione bisognerebbe iocominciare le moltiplicazioni dalle cifre a sinistra del moltiplicatore, come vedesi nell' esempio che segue; allora è mestieri di scrivere la prima cifra a destra di ogni prodotto oella colonna che le appartiene, come si è vedoto nel n.° 68.

```
                                  57845
                                   4856
prod. per 4...........231380
prod. del prec. per 2....462760
prod. del prec. per 7.....3239320
prodotto totale.........30994920
```

Potrebbe anche avvenire che i multipli non fossero disposti proprio l'uno appresso dell' altro nel modo che abbiamo fin qoi indicato, ma si trovassero comuoque nel moltiplicatore; allora la semplicizzazione potrebbe aver luogo avverteodo però sempre di scrivere convenieotemente i prodotti parziali. Ciò vedesi nell' esempio infrascritto.

```
                                   47834
                                   28735
prod. per 7.............  334838
prod. del prec. per 5.....   1674190
prod. del 1° per 4.........1339352
                           1385309990
```

V. *Conoscendo i prodotti a due a due dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, per dedurne, col soccorso delle dita, i prodotti a due a due dei numeri 5, 6, 7, 8, 9; si stenda-*

no tutte le dita delle due mani; si sottragga ciascun fattore da 10, e si serrino tante dita in ciascuna delle due mani quante sono le unità di ciascun resto; le dita che rimarranno stese esprimeranno le decine del prodotto cercato; e le unità saranno espresse dal prodotto dei numeri delle dita serrate in ciascuna mano. Infatti, siano n ed n' i due fattori; sottraendo ciascuno da 10, si avranno i resti $10-n$ e $10-n'$, che rappresenteremo con b e b'; si chiuderanno dunque b dita in una mano e b' nell' altra. Chiamiamo l ed l' le dita che rimarranno stese in ciascuna mano; avremo

$$10-n=b,\ 10-n'=b',\ b+l=5,\ b'+l'=5$$

dalle quali uguaglianze si deduce

$$n=10-b=2.5-b=2\ (b+l)\ -b=b+2l;$$
$$n'=10-b'=2.5-b'=2\ (b'+l')-b'=b'+2l';$$
$$nn'=bb'+2\ (b+l)\ l'+2\ (b'+l')\ l'.$$

In cambio di $b+l$ e $b'+l'$, mettendo il loro valore 5, verrà

$$nn'=10\ (l+l')+bb'=l+l' \text{ decine} + bb' \text{ unità}.$$

e così rimane dimostrata la regola. Essa, come abbiam detto, non è applicabile se non ai fattori maggiori di 4, perchè altrimenti si dovrebbero abbassare più di cinque dita in ciascuna mano, il che è impossibile.

VI. Le regole stabilite ai n. 196 e 197 per avere il prodotto di due decimali sino ad una data cifra decimale, suppone che i due decimali dati siano esatti e non approssimati; se ciascuno di essi fosse approssimato secondo l' uso per meno di mezza unità dell' ultima cifra allora è chiaro che vi sarebbero varie cifre erronee al prodotto, e però per potere ben regolare l' approssimazione, cioè per sapere il numero conveniente di cifre decimali da prendere in ciascun fattore, è buono avere una regola per conoscere il numero di queste cifre erronee. Siano a e y gli errori dei due fattori a e b; il prodotto sarà $(a+x)(b+y)=ab+bx+ay+xy$; dunque, disprezzando xy ch'è una quantità piccolissima, l'errore del prodotto è espresso da $bx\times ay$, e diverrà minore quando i due fattori siano approssimati uno per eccesso l'altro per difetto, perchè la somma $bx+ay$, avendo i suoi termini di segni contrari, si cangerà in una differenza. Se a è il moltiplicando, cioè il maggiore dei due fattori, ax sarà il termine più influente dell' errore; onde quest'errore sarà tanto minore quanto minore è y, cioè quanto maggiore sia l' approssimazione del fattore b. Supponendo che l'errore sia minore, secondo il solito, di $\frac{1}{2}$ di una unità dell'ultima cifra decimale, in ciascun fattore, si avrà $x=y=\frac{1}{2}$, e

però l'errore del prodotto sarà $\frac{1}{2}(a+b)$ cioè *delle ultime cifre saranno erronee tante quante cifre ha la metà della somma dei due fattori considerati come due numeri interi.*

Per esempio, i due fattori 3,147 e 58,73 approssimati l'uno per meno di mezzo millesimo, l'altro per meno di mezzo centesimo, daranno al prodotto tante cifre decimali erronee quante ne ha la semisomma $\frac{1}{2}(3147+5873)=4510$, cioè quattro cifre.

NOTA E — *Sulla divisione.*

Ancora nella divisione non sono da tacere alcune osservazioni analoghe a quelle fatte per la moltiplicazione.

I. Allorchè in una divisione il divisore fosse terminato da alcuni zeri e il dividendo o non ne abbia o ne abbia meno; si può esser sicuri anticipatamente che si avrà un resto; perchè se il dividendo fosse il prodotto del divisore per il quoziente, essendo terminato il primo fattore da un certo numero di zeri, il prodotto dovrebbe averne altrettanti. Però non bisogna inferirne che quando il dividendo abbia a destra o lo stesso numero di zeri che il divisore, o di più, la divisione sia esatta; in questo caso possiamo solo dire che ciò sia possibile; ma non necessario. È chiaro poi che in questo caso, qualora la divisione sia esatta se il dividendo e il divisore sono terminati dallo stesso numero di zeri, il quoziente ne avrà tanti quanto è l'eccesso degli zeri del primo su quelli del secondo. In ultimo se il dividendo fosse terminato da un certo numero di zeri e il divisore non ne abbia; sarebbe possibile che la divisione potesse eseguirsi esattamente; ma non però necessario. Qualora la divisione fosse esatta, è chiaro che il quoziente sarebbe terminato dallo stesso numero di zeri che il dividendo.

II. È da notare che quando il divisore fosse il prodotto di più fattori sarebbe più semplice di dividere successivamente il dividendo per ciascuno di questi fattori; così secondo quello che si è detto nel n.° 102 il quoziente sarebbe lo stesso. Abbiasi per esempio a dividere 1365 per 105; essendo $105=3\times5\times7$; noi faremo successivamente $1365:3=455$, $355:5=91$, $91:7=13$; dunque $1365:105=13$.

In questo esempio nessuna divisione successiva ha dato un resto; se mai ve ne fossero alcuni, ecco la regola che bisogna seguire: *Si trovino i quozienti successivi non tenendo conto dei resti, all' ultimo per trovare il resto della divisione, si moltiplichi l'ultimo resto pel divisore antecedente e al prodotto si aggiunga il resto precedente, si moltiplichi questa somma per il terzo divisore risalendo, e si aggiunga al prodotto il resto di questa divisione; e così di seguito finchè, risalendo sempre, siasi giunto alla prima divisione.* Così, prendiamo l'esempio di so-

pra, e facendo rimanere lo stesso il divisore, alteriamo il dividendo in modo che si trovino alcuni resti successivi; abbiasi a dividere 1388 per 105. Cominciando le divisioni successive, nel dividendo 1388 per 3 si ha 462 col resto 2, non tenendo conto di questo resto, si divida 462 per l'altro fattore 5 del divisore; si avrà 92 col resto 2; similmente si divida 92 per l'ultimo fattore 7; si troverà 13 col resto 1. Adunque i divisori successivi sono stati 3, 5, e 7, e i resti successivi 2, 2, 1. Ora per trovare il resto totale, cioè di 1388 : 105; si moltiplichi il resto dell'ultima divisione pel divisore 5 dell' antecedente, si avrà 5 a cui si aggiungerà il resto precedente 2, e si troverà $5+2=7$; questa somma si moltiplicherà per il primo divisore 3, si otterrà $3\times7=21$, a cui si aggiungerà il primo resto 2; e si avrà 23 ch'è il resto totale cercato; e si conchiude che 1388 diviso per 105 dà 13 col resto 23. E così si opererebbe per qualunque sia il numero delle divisioni successive.

La dimostrazione di questo procedimento è facilissima.

Nella prima divisione ove 3 è il divisore, avendo avuto 462 col resto 2, il quoziente completo è $462\frac{2}{3}$; ora per dividere questo numero pel secondo divisore 5, divideremo per 5 prima l' intero, poi la frazione e poi sommeremo i quozienti; 462 diviso per 5 abbiam veduto che dà 29 col resto 2; dunque il resto che bisogna dividere per 5 è $2\frac{2}{3}=\frac{2\times3+2}{3}$; dividendolo dunque per 5 avremo $\frac{2\times3+2}{5\times3}$; e così il quoziente completo della seconda divisione è $92\frac{2\times3+2}{5\times3}$; per dividere questo numero per l' ultimo divisore 7 divideremo prima 92 per 7; avremo 13 col resto 1; dunque il resto da dividersi per 7 è $1\frac{2\times3+2}{3\times5}=\frac{1\times3\times5+2\times3+2}{3\times5}$ e dividendo per 7 si avrà $\frac{1\times3\times5+2\times3+2}{3\times5\times7}$; il quoziente completo, ch' è quello di 1388 diviso per 105 è $13\frac{1\times3\times5+2\times3+2}{3\times5\times7}$. Ora è chiaro che il numeratore di questa frazione è il resto totale di 1388 diviso per 105 è facilissimo vedere che questo numeratore può scriversi così $(5+2)\times3+2$; espressione che indica appunto le operazioni da noi fatte per trovare il resto totale.

III. Si è veduto nella nota antecedente che per moltiplicare un numero per 5, 25, 125... generalmente per una parte aliquota di una potenza di 10, bastava scrivere a destra del moltiplicando tanti zeri quante eran le cifre del divisore, e poi dividere il numero che si aveva per 2, 4, 8... generalmente per quel numero ch'esprimeva qual parte fosse il divisore della potenza di 10; dunque viceversa per dividere un numero per una parte aliquota di una potenza di 10 si moltiplicherà il dividendo per il numero ch'esprime quante volte il divisore è contenuto in questa potenza; e si dividerà per questa potenza il prodotto; il che si fa, come si è veduto nel n.° 188 staccando in esso prodotto da destra a sinistra tante

cifre decimali quante son quelle del divisore. Per esempio si debba dividere 48793 per 125; essendo 1000=125×8, noi prenderemo prima l'ottuplo di 48793 ch'è 390344; indi divideremo questo prodotto per 1000 ed avremo 390,344; dunque 48793 : 125=390,344.

IV. Non taceremo di una grande semplicizzazione che può aver luogo nella divisione allorchè si vuole avere il solo quoziente intero, ovvero particolare, ch'è quanto dire si vuole il quoziente che differisca del vero per meno dell' unità. In tal caso la regola è la seguente: *Si sopprimano a destra del dividendo tante cifre quante ne ha il divisore men una; le rimanenti cifre del dividendo potranno così contenere o pur no il divisore. Se lo contengano si esegui la divisione, e si avrà un certo numero di cifre al quoziente, se nol contengano, si sopprimano tante cifre a destra del divisore quante sono necessarie perch' esso sia contenuto nel dividendo; così facendo la divisione si avrà al quoziente una sola cifra. Dipoi in entrambi i casi si divida il primo resto pel divisore toltane la prima cifra a destra; il secondo resto che così si ha pel nuovo toltane medesimamente la prima cifra a destra; e così di seguito fino a che siano esaurite tutte le cifre del divisore. In tutte le dette soppressioni abbiasi sempre l' avvertenza di aumentare di un'unità la prima cifra restante a destra se quella delle soppresse che la seguiva era o uguale a 5 o maggiore.* Applichiamola ad un esempio. Si voglia il quoziente approssimato per meno dell' unità di 5 912834 diviso per 8276; se si operi alla maniera ordinaria, si troverà 714 col resto 3 770; ora applicando la regola data innanzi noi con un'operazione più semplice troveremo lo stesso quoziente 714; ma il resto, di cui non vogliamo far conto, sarà diverso. Sopprimeremo a destra tante cifre quante sono quelle del divisore meno una, cioè 3 ed avremo 5913, e ho posto 3 invece di 2 per prima cifra a destra perchè ella era seguita da 8 maggiore di 5; ora 5913 non contiene il divisore 8276; noi dunque sopprimeremo la prima cifra a destra del divisore, ed avremo 827, ove pure abbiamo aumentato di 1 la cifra delle unità, perchè ella era eseguita da 6, ch'è maggiore di 5. Fatto ciò opereremo come si vede qui sotto

```
5913 |828
 117  714
  34
   2
```

divideremo 5913 per 828 ed avremo per quoziente 7 col resto 117; indi divideremo ancora questo resto pel divisore soppressane la prima cifra a destra, cioè per 83, ove abbiamo aumentato di 1 il 2 perch' esso era seguito di 8 maggiore di 5; abbiamo così 1 col resto 34; in ultimo divideremo 34 per la prima cifra a sinistra 8 del divisore ed avremo 4 col resto 2. Operando così il resto, di cui non si tien conto è stato 2; ma il divisore particolare è stato 714 lo stesso

di prima. In questo esempio ove il dividendo e il divisore non erano a principio di molte cifre l'operazione non ha ricevuto una semplicizzazione gran fatto considerevole; ma si vede facilmente quanto maggiore sarebbe questa, a misura che le cifre del dividendo o del devisore crescessero di numero.

Non aggiungiamo dimostrazione di questa regola perch' ella è, come vedesi, come una estensione di quella data al n.° 200.

FINE DELLE NOTE.

Nell' *errata* si è omesso di correggere un errore incorso nel verso 14 scend. della pag. 29, ove invece di: *in cui il dividendo e il divisore siano due numeri interi*, si dee leggere: *il quoziente sia un numero intero.*

TAVOLA I.

RAPPORTI DELLE ANTICHE MISURE FRANCESI ALLE NUOVE.

1 metro = tese 0,513074074 = 3 pied. 0 pol. 11 lin., 296 = 3 pied. 078444.
1 tesa = metri 1, 9490363.
1 piede = metri 0, 3248394.
1 pollice = centimetri 2, 706995.
1 auna = 43 pol. 10 lin., 5 = metri 1, 187694.

---

1 ara = tese quadrate 26, 3245.
1 arpent di 900 t. quadr. = are 34, 18867.
1 ettara = arpents 2, 924944.
1 tesa quadrata = metri quadrati 3, 798743.
1 piede quadr. = decimetri quadrati 10, 552; 1 pol. quad. = cent. quadr. 7, 32782.

---

1 stero = tese cube 0, 135064 = piedi cubi 29, 17386.
1 stero = vie 0, 521 = corde 0, 261; 1 via = steri 1, 920.
1 una tesa cuba = metri cubi 7, 403887.

---

1 litro = litrons 1, 2300.
1 litro = (50, 4124 pol. cub.) = pinte 1, 07376.
1 litron = litri 0, 81302; 1 pinta = litri 0, 9313.
1 boisseau = decalitri 1, 3008; 1 ettolitro = boisseaux 7, 6874.

---

1 libbra = ettogrammi 4, 89506.
1 chilogrammo = libbre 2, 0428765.

Rapporti approssimati.

76 metri = 39 tese	13 decimetri = 4 piedi	81 centimetri = 2½ piedi
19 metri = 16 aune	3 decimetri = 11 pol.	97 millimetri = 43 linee.
40 ettari = 117 arpents	19 met.quad. = 5 t. quad.	21 decim.qua. = 2 pie. q.
37 steri = 5 tes. cub.	5 decim.cub. = 252 pol. cub.	22 cent. quad. = 3 pol. q.
13 litri = 16 litrons.	13 decalitri = 10 boiss.	27 litri = 29 pinte.
70 chilo. = 143 libbre	11 ettogr. = 36 once.	8 decigrammi = 15 grani.

4 miriametri = 9 leghe terrestri; 80 franchi = 81 lire tourn.

TAVOLA II.

MISURE STRANIERE.

Misure lineari per gli usi comuni.

		METRI	PAL. NAP.
AMBURGO	*piede del Reno*	0, 313854	1, 186368
AMSTERDAM	*piede*	0, 283	1, 070
	auna	0, 6903	2, 6093
ANVERSA	*piede*	0, 286	1, 081
	auna per la seta	0, 694	2, 623
	auna per la lana	0, 684	2, 586
AUSTRIA	*klafter* o tesa composta di 6 piedi	1, 896614	7, 169201
BADE	(gran ducato di) *auna* di 2 *piedi*	0, 6000000	2, 2680000
BOLOGNA	*piede*	0, 3801	1, 4368
CARRARA	*palmo* pei marmi	0, 24927	0, 94224
COPENAGUEN	*auna*	0, 6276	2, 3723
COSTANTINOPOLI	*pic* piccolo per i panni	0, 648	2, 449
DRESDA	*auna*	0, 5665	2, 1414
FERRARA	*piede*	0, 4039	1, 5267
FIRENZE	*braccio*	0, 58366	2, 20623
FRANCOFORTE	*auna*	0, 5473	2, 0688
GENOVA	*palmo*	0, 2491	0, 9416
GINEVRA	*piede*	0, 4879	1, 8443
	auna	1, 144	4, 323
GRECIA	*piede*	0, 306	1, 157
	piede olimpico antico $\frac{1}{6000}$ del miglio di 60 a grado	0, 30859	1, 16647
	piede pizio o delfico antico 3/5 dell' olimpico	0, 24687	0, 93317
INGHILTERRA	*piede* di 12 *once o pollici*	0, 3047945	1, 1521232
	yard di 3 *piedi*	0, 9143835	3, 4563696
	fathom o *tesa* di 6 piedi	1, 82876770	6, 9127392
LISBONA	*vara* o *auna*	1, 093	4, 132
LOSANNA	*tesa* di 10 *piedi*	3, 0000000	11, 340000
MADRID	*vara* o *auna* di Castiglia di 3 piedi	0, 848	3, 205
MANTOVA	piede	0, 4669	1, 7649
MILANO	*braccio* comune	0, 594936	2, 248858
	piede agrimensorio	0, 435185	1, 644999
MODENA	*piede*	0, 5230	1, 9769
MONACO	*auna*	0, 833	3, 149
PADOVA	*piede*	0, 3574	1, 3510
PRESBURGO	*auna*	0, 5581	2, 1096
PRUSSIA	*piede* del Reno	0, 313854	1, 186368
	auna nuova	0, 6669	2, 5209
BERLINO	*piede* antico	0, 310	1, 172
	auna antica	0, 6677	2, 5239
REGGIO di Modena	*piede*	0, 5309	2, 0068

ROMA	*piede*	0,297896	1,126047
	palmo $^3/_4$ del piede	0,223422	0,844535
	piede antico $\frac{1}{5000}$ del miglio di 75 a grado	0,29625	1,11982
	cubito	0,44437	1,67972
RUSSIA	*piede* eguale al piede inglese di 12 pollici	0,3047945	1,152123
	archina formata di 28 pollici inglesi	0,7111872	2,688288
	sagene di 84 *pollici* o di 7 piedi	2,1335615	8,064862
SARDEGNA	*palmo*	0,248	0,937
	raso o auna	0,549	2,075
SVEZIA	*piede*	0,297	1,123
	auna	0,594	2,245
TORINO	*piede* detto *liprando* di 12 once, uguale ad $\frac{1}{4800}$ del *miglio* di 45 a grado	0,5137	1,9418
	raso di 14 once del piede	0,5994	2,2657
VARSAVIA	*auna*	0,5846	2,2098
VENEZIA	*piede*	0,3474	1,3132
VERONA	*piede*	0,3429	1,2962

Misure itinerarie.

		METRI	NUMERO di misure contenute in un grado
ALEMAGNA	*miglio*	7408	15
	lega	9260	12
AMBURGO	*miglio* di 24000 piedi del Reno	7532	14 $^3/_4$
AUSTRIA	*miglio* di 24000 piedi austriaci.	7586	14 $^2/_3$
BADE	(gran ducato di) *lega*	8890	12 $^1/_2$
CHINA	*miglio* detto *li*	577	192 $^3/_5$
COPENAGUEN come	Amburgo		
GRECIA ANTICA	*stadio olimpico* equivalente a $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado..	185	600
	stadio pizio o *delfico* equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 75 a grado	148	750
ITALIA	*miglio*, usato come miglio marino da molte nazioni, specialmente dalla Francia, dall'Inghilterra e dall'Austria.	1851,9854	60

[1] In questa tavola si è supposto il quadrante terrestre di metri 10000724, secondo il Delambre.

		METRI	NUMERO di misure contenute in un grado
INGHILTERRA.....	*miglio* di 1760 *yards*.........	1609	69
POLÒNIA.........	*miglio*	5556	20
PORTOGALLO......	*lega* terrestre..................	6173	18
PRUSSIA..........	*miglio* di 2400 piedi del Reno.	7532	14 3/4
	miglio di 15 a grado prima del 1816....................	7408	15
ROMA...........	*miglio* di 1000 *passi* ciascuno di 5 *piedi*	1489	74 4/7
ROMA ANTICA.....	*miglio* di 75 a grado composto di 1000 *passi* ciascuno di 5 piedi antichi.............	1451	75
	stadio 1/8 del miglio eguale ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado.	185	600
RUSSIA..........	*wersta* di 1500 *archine* o di 3500 piedi inglesi..............	1067	104 1/6
	miglio finlandico di 10 *werste*.	10668	10 5/12
SPAGNA..........	lega itineraria di 8000 *vare*...	6784	16 2/3
	lega marina................	6350	17 1/2
SVEZIA..........	*miglio*	10417	10 2/3
TORINO..........	*miglio* piemontese di 4800 *piedi*	2466	45
TURCHIA.........	*miglio* detto *berri*...........	1670	66 7/12

Misure superficiali.

		ARE	NUMERO di misure in un migl. quadrato
AUSTRIA.........	*yuchart* di 1600 *klafter* quadrati	57, 5543	595 11/12
GRECIA ANTICA....	antica *plettro* di 10000 piedi olimpici quadrati............	9, 523	3601 1/5
INGHILTERRA	*acre* di 4840 *yards* quadrati...	40, 4671	847 4/9
MADRID	*famiada* pei campi di 500 *estadales* quadrati............	48, 34	709 3/7
	aranzada pei vigneti di 400 *estadales* quadrati	38, 67	886 4/5
MILANO..........	*pertica* di 24 *tavole* ciascuna di 144 *piedi* quadrati.........	6, 5452	5239 1/2
PRUSSIA..........	*morghen* di 180 *pertiche* quadrate (la pertica lineare di 12 piedi del Reno).........	25, 5323	1343 1/7
ROMA	*pezza* di 16 *catene* quadrate, la catena lineare essendo di palmi 57 1/2.................	26, 4062	1298 9/12

ROMA ANTICA.....	*jugero* di 28800 piedi antichi quadrati.................	25, 2761	1356 $^{3}/_{4}$
RUSSIA	*deciatine* di 2400 *sagene* quadrate......................	109, 25000	313 $^{9}/_{10}$

Misure di capacità.

		LITRI	TOMOLI napolit.	CARRAFE legali napolit.
GRECIA ANTICA....	*anfora* antica equivalente a $^{3}/_{2}$.... del cubo di $\frac{24}{25}$ di 1 *piede* olimpico...	39, 000	0,70215	53, 639
INGHILTERRA	*gallone* imperiale..	4, 545458	....	6, 249
ROMA ANTICA.....	antica *anfora* eguale al cubo del *piede* romano antico...	26, 000	0, 46809	35, 759

Pesi.

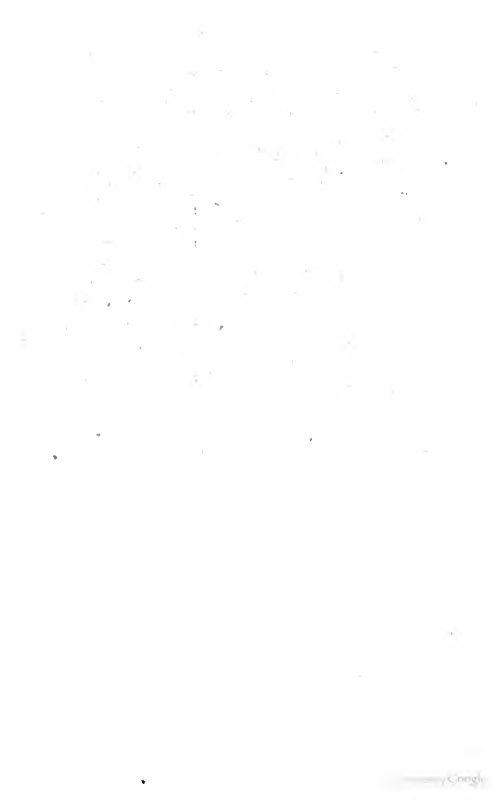
		CHILOGR.	ROT. NAP.
AMBURGO.........	*libbra*.....................	0, 4843	0, 5435
AMSTERDAM......	*libbra* di 16 once...........	0, 495	0, 554
ANVERSA	*libbra*.....................	0, 47016	0, 52768
AUSTRIA.........	*libbra*.....................	0, 5600	0, 6285
BADE............	(Gran ducato di) *libbra*......	0, 500000	0, 561169
CAPENAGUEN......	*libbra*.....................	0, 5994	0, 5605
COSTANTINOPOLI...	*oka* o *rotolo* grosso..........	1, 27	1, 43
DRESDA..........	*libbra*.....................	0, 467	0, 524
FIRENZE.........	*libbra*.....................	0, 339542	0, 381081
GENOVA..........	*libbra*.....................	0, 317	0, 356
GRECIA ANTICA ...	*mina attica* o *libbra* eguale ad $\frac{1}{100}$ del peso di un volume di acqua piovana corrispondente all' *anfora attica*........	0, 3258	0, 3657

		CHILOGR.	ROT. NAP.
INGHILTERRA	*libbra troy* di 12 once ognuna di 480 grani	0, 373096	0, 418740
	libbra avoirdupois eguale a 7000 grani troy	0, 453415	0, 508885
	tonnellata di mare di 20 quintali ognuna di lib. 112 *avoirdupois*	1043, 666	1140
LISBONA	*libbra*	0, 4588	0, 5149
	arrobba peso di 32 *libbre*		
LOSANNA	*libbra* di 16 once	0, 500000	0, 561169
MADRID	*libbra*	0, 460	0, 516
MILANO	*libbra* grossa di 28 once	0, 762517	0, 855802
	libbra piccola di 12 once	0, 326793	0, 366772
PRUSSIA	*libbra* eguale ad $^1/_{66}$ del peso di 1 piede cubo del Reno di acqua distillata alla temperatura di 15 gradi di Reaumur	0, 467711	0, 524930
ROMA	*libbra* attuale	0, 339	0, 380
	libbra antica eguale ad $^1/_{96}$ del peso di un *anfora*, o sia di 1 piede cubo antico di acqua piovana	0, 3258	0, 3657
RUSSIA	*libbra* della zecca	0, 409367	0, 459448
SVEZIA	*libbra* detta *victualia*	0, 425	0, 477
TORINO	*libbra*	0, 368845	0, 413969
	rubbo peso di 25 libbre		
VARSAVIA	*libbra*	0, 405	0, 455

Monete. [1]

		FRANCHI	DUC. NAP.
AMSTERDAM	*fiorino*	2, 14	0, 504
AUSTRIA	*lira* austriaca	0, 865	0, 204
	fiorino di 3 lire	2, 595	0, 611
	rixdalers	5, 19	1, 221
BADE	(Gran ducato di) *fiorino*	2, 12	0, 491
BAVIERA	*fiorino d' impero*, moneta di conto	2, 16	0, 508
BELGIO	*fiorino corrente* antica moneta di conto	1, 82	0, 428
	franco	1, 00	0, 235
COPENAGUEN	*rixdalers*	5, 66	1, 332
COSTANTINOPOLI	*pezza* di 5 piastre del 1811	4, 14	0, 974
	1 *borsa* vale 30 piastre		
FIRENZE	*lira*	0, 84	0, 198

[1] I rapporti di queste monete sono *al pari*, cioè quelli delle quantità di metallo fino, esclusa la lega.

FRANCOFORTE	*rixdalers* di 90 *kereutzers*	3, 90	0, 918
	fiorino di 60 *kereutzers*	2, 60	0, 612
GENOVA	*lira*	0, 835	0, 196
GRECIA ANTICA	*dramma* unità monetaria	0, 93	0, 219
	mina di 100 dramme	92, 68	21, 81
	talento d'argento di 60 mine	5561	1308
	talanto d'oro di 600 mine	55609	13084
INGHILTERRA	*lira sterlina* di 20 *scellini*	25, 208	5, 931
MILANO	*lira austriaca*	0, 865	0, 204
	lira antica	0, 76	0, 179
PIEMONTE	*lira* nuova	1, 00	0, 235
	lira antica	1, 18	0, 278
POLONIA	*rixdalers*	5, 19	1, 221
PORTOGALLO	*cruzada* nuova di 488 *reali*	2, 94	0, 692
PRUSSIA	*scudo*, *rixdaler* o *tallero*	3, 71	0, 873
ROMA	*scudo*	5, 36	1, 261
ROMA ANTICA	*sesterzio* o *numerus* unità monetaria	0, 20	0, 047
	denaro di 4 sesterzi	0, 81	0, 191
	aureo di 25 danari, o 100 sesterzi	20, 38	4, 795
	talento grande di 32000 sesterzi	6522	1535
	talento piccolo di 24000 sesterzi	4491	1057
RUSSIA	*rublo*	4, 00	0, 941
SARDEGNA	come il Piemonte		
SPAGNA	*reale di plata*	0, 543	0, 128
	reale di veglione, metà del precedente	0, 27	0, 064
VENEZIA	*zecchino*	11, 95	2, 812

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Napoli 5 giugno 1852

Vista la domanda del Tipografo Raffaele Marotta con che ha chiesto di porre a stampa l'opera intitolata = Lezioni di Aritmetica di Errico de Angelis = Visto il parere del R. Revisore Signor D. Francesco Bruno. = Si permette che la suddetta opera si stampi; però non si pubblichi senza un secondo permesso che non si darà se prima lo stesso R. Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l'impressione uniforme all'originale approvato.

Il Presidente interino: Francesco Saverio Apuzzo.
Il Segretario Interino: Giuseppe Pietrocola.